奇数、偶数、完全平方数

南秀全　余　石

上海教育出版社

VISIT…

LANZAROTE Caliente.com

奇数、偶数、完全平方数
南秀全 余 石
上海教育出版社出版发行
（上海永福路123号）
（邮政编码：200031）
各地新华书店经销 上海东华印务公司印刷
开本787×1092 1/32 印张6.25 字数133,000
1998年1月第1版 1998年1月第1次印刷
印数1－5,150本
ISBN 7-5320-5432-2/G·5674 定价：6.00元

如遇印装质量问题请拨打52815253×3019 地址：云岭西路400弄251号

前　言

整数可以分为两大类：被 2 除余 1 的属于一类，被 2 整除的属于另一类，前类中的数叫做**奇数**，后类中的数叫做**偶数**.通过分析整数的奇偶性来论证问题的方法称为**奇偶分析法**.奇偶性分析是数学奥林匹克解题的重要方法之一，在中国数学会普及工作委员会制定的《初中数学竞赛大纲》中已作了明确的规定："奇数和偶数，奇偶性分析，奇偶的特殊表述法：染色法，0、1 法，+1、-1 等表述法"，本书正是按竞赛大纲的这些要求，通过对近年来国内外数学竞赛中典型的试题加以分析，来阐述奇偶分析法在解题中的作用以及怎样利用奇偶性分析法来解竞赛题.

"完全平方数"在初中数学竞赛大纲中也作了要求，在本书的最后一节，较为系统地介绍了完全平方数的性质，以及在解各级竞赛题中的应用.

由于本人水平有限，加上时间仓促，书中不足之处在所难免，诚请同仁们不吝赐教.

作　者

1997 年元月 10 日

目　录

一、奇数和偶数的基本性质……………………………… 1
二、奇偶分析法在解题中的应用……………………………… 4
1. 判别整数的奇偶性 ……………………………… 4
2. 判别整数的整除性 ……………………………… 9
3. 判别方程是否有整数解……………………………… 15
4. 解不定方程……………………………… 22
5. 在几何中的应用……………………………… 25
6. 利用奇偶性解其他一些问题……………………………… 32
三、奇数和偶数的特殊表示法 ……………………………… 57
1. 涂色法……………………………… 57
2. 标数法……………………………… 78
四、完全平方数 ……………………………… 97
1. 完全平方数的性质……………………………… 97
2. 完全平方数与完全平方式 ……………………………… 107
3. 与完全平方数有关的问题 ……………………………… 121
4. 完全立方数及其他 ……………………………… 148
习题解答概要……………………………… 166

一、奇数和偶数的基本性质

我们知道，一切整数可分为两大类：奇数类和偶数类．用整除的术语来说，凡是能被 2 整除的整数叫做**偶数**，例如 0，±2，±4，±6，…，特别要注意 0 是偶数，任何偶数都可以表示成 $2n$ 的形式．不能被 2 整除的整数，叫做**奇数**，例如±1，±3，±5，…，任何奇数都可以表示成 $2n+1$ 的形式，这里 n 为整数（通常记作 $n\in Z$，Z 表示整数集）．

奇数和偶数有许多十分明显而又十分简单的性质．主要性质有：

性质 1　奇数≠偶数；奇数＋偶数≠0.

性质 2　奇数±奇数＝偶数；偶数±偶数＝偶数；奇数±偶数＝奇数.

性质 3　奇数×奇数＝奇数；奇数×偶数＝偶数；偶数×偶数＝偶数.

性质 4　奇数个奇数之和是奇数；偶数个奇数之和是偶数；任意有限个偶数之和是偶数.

性质 5　任意有限个奇数之积是奇数；偶数与任意整数之积是偶数.

性质 6　若干个整数的乘积是奇数，则其中每一个因子都是奇数；若干个整数之积是偶数，则其中至少有一个因子是偶数.

性质 7　两个整数的和与差的奇偶性相同.

推论　若干个整数的和与差的奇偶性相同.

以上几条性质都很简单，这里就不证明了．为了叙述方便，我们把被 b 除余 r（其中 b 是不等于 0 的整数，r 是适合 $0\leqslant r<|b|$ 的整数）的整数写作 $bq+r$（其中 $q\in Z$），例如 $4q+1$ 或 $4k+1$ 就表示被 4 除余 1 的整数．

性质 8　奇数的平方被 4 除余 1，偶数的平方是 4 的倍数．

$$\because\quad (2n+1)^2=4n^2+4n+1$$
$$=4(n^2+n)+1,$$
$$(2n)^2=4n^2.$$

推论　奇数的平方被 8 除余 1．

$$\because\quad (2n+1)^2=4(n^2+n)+1$$
$$=4n(n+1)+1.$$

其中 n，$(n+1)$ 是两个连续整数，必有一个是偶数．

性质 9　所有形如 $4k+3$ 的数不能表示为两个整数的平方和．

$$\because\quad (2m+1)^2+(2n+1)^2=4(m^2+m+n^2+n)+2;$$
$$(2m)^2+(2n)^2=4(m^2+n^2);$$
$$(2m)^2+(2n+1)^2=4(m^2+n^2+n)+1.$$

即两个奇数的平方和为 $4k+2$ 型，两个偶数的平方和为 $4k$ 型，一个奇数和一个偶数的平方和为 $4k+1$ 型，因此，没有两个整数的平方和为 $4k+3$ 型．

例如，由此性质可以得到方程 $x^2+y^2=1999$ 没有整数解．

性质 10　所有形如 $4k+2$ 型的数不能表示为两个整数的平方差．

$$\because\quad x^2-y^2=(x+y)(x-y),$$

由性质 7，$x+y$ 与 $x-y$ 具有相同的奇偶性．

若 $x+y$ 和 $x-y$ 都是奇数，则 $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$ 也是奇数，即为 $4k+1$ 或 $4k+3$ 型；

若 $x+y$ 和 $x-y$ 都是偶数，则 $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$ 为 4 的倍数，即为 $4k$ 型.

因此，没有两个整数的平方差为 $4k+2$ 型.

例如，由此性质可以得到方程 $x^2-y^2=1998$ 没有整数解.

二、奇偶分析法在解题中的应用

利用奇数和偶数的分类及其特殊性质，可以简捷地求解一些与整数有关的数学题，包括一些看上去比较难的问题. 特别是一些趣味数学问题和数学竞赛题，只要对其中的数量关系作简单的奇偶性分析，问题就能迎刃而解. 下面介绍整数的奇偶性在解题中的各种应用.

1. 判别整数的奇偶性

［**例 1**］ 在 1,2,…,1997,1998,1999 这 1999 个数的前面任意添加一个正号或负号，问它们的代数和是奇数还是偶数？（根据 1989 年湖北省黄冈地区初中数学竞赛题改编）

解 因为两个整数的和与差的奇偶性相同，所以不论正负号如何添加，它们的代数和的奇偶性都与 $1+2+\cdots+1998+1999$ 的奇偶性相同.

$\because$ $1+2+\cdots+1998+1999$

$=$（999 个偶数）$+$（1000 个奇数）

$=$ 偶数，

$\therefore$ 任意添加正负号后的代数和一定是偶数.

［**例 2**］ 设 n 为奇数，$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为 $1,2,\cdots,n$ 的任一排列，求证：积 $(1-a_1)(2-a_2)\cdots(n-a_n)$ 必为偶数.（1906 年匈牙利数学竞赛题）

证明 用反证法. 若 $(1-a_1)(2-a_2)\cdots(n-a_n)$ 为奇数，则

每个因数 $1-a_1, 2-a_2, \cdots, n-a_n$ 皆为奇数. 又因为 n 为奇数，而

$$(1-a_1)+(2-a_2)+\cdots+(n-a_n)$$
$$=(1+2+\cdots+n)-(a_1+a_2+\cdots+a_n)=0,$$

故得奇数=0,矛盾.

$\therefore\ (1-a_1)(2-a_2)\cdots(n-a_n)$ 必为偶数.

说明 本例还可以推广为如下的命题：

设 $a_1, a_2, \cdots, a_{2n+1}$ 是任意 $2n+1$ 个整数，$b_1, b_2, \cdots, b_{2n+1}$ 是 $a_1, a_2, \cdots, a_{2n+1}$ 的任意一个排列，那么乘积 $(a_1-b_1)(a_2-b_2)\cdots(a_{2n+1}-b_{2n+1})$ 必是偶数.

[例 3] 有 29 个省市的乒乓球队参加友谊邀请赛，能否安排出这样的比赛场次，使每个球队恰好参加奇数次比赛？为什么？

解 不能作出这样的安排. 否则，假设总的比赛场次为 n 场，由于每一场比赛由两个队进行，可以出场比赛的共有 $2n$ 个队次. 另一方面，每个球队恰好参加奇数次比赛，于是 29 个奇数之和是奇数，这就是说，总计参加比赛的队次应为奇数，但奇数不等于偶数 $2n$，矛盾. 由此得证.

[例 4] 求证：不论在什么社交场合下，握过奇数次手的人数总是偶数.

证明 假设在社交场合中握了奇数次手的共有 n 人，握了偶数次手的共有 m 人，那么它们握手的总计人次是 n 个奇数加 m 个偶数，可见它们的握手总人次与 n 是同奇偶的；另一方面，握手是相互的，每握一次手，按人次计算就是两次，所以握手的总人次必是偶数，可见 n 必是偶数，证毕.

说明 由例 3、例 4 已看到两个乒乓球队比赛与两人握

手，在分别计算它们的队次与人次上有类似之处.我们将球队(人)表示为平面上的点，如果两队(人)比赛(握手)，就在表示它们的两点之间连一直线段，否则，就不连线段，于是可得如下的命题：

［例5］ 设平面图上共有有限个点，没有三点共线，且其中有些点之间用直线相连.如果图中一点恰与其他 m 个点有连线，当 m 为偶(或奇)数时，那么称这一点为偶(或奇)点.求证：在这一平面图上，奇点个数必是偶数.

证明 假设平面图中共有 n 条直线段，现对 n 用数学归纳法证明.当 $n=1$ 时，则易见恰好有两个奇点，命题成立；假设当 $n=k$ 时命题成立，现需证命题对 $n=k+1$ 时也成立，为此，任取图中一条线段 AB，那么点 A 与点 B 的奇偶性以及在图中去掉线段 AB 后，点 A，B 的奇偶性如下表：

原图中 点 A	原图中 点 B	去掉线段 AB 的图中 点 A	去掉线段 AB 的图中 点 B	点的变化数
奇	奇	偶	偶	-2
奇	偶	偶	奇	0
偶	奇	奇	偶	0
偶	偶	奇	奇	2

从表中可见，去掉线段 AB 后，奇点的变化数是偶数，又因原图中去掉了线段 AB 后的新图中，共有 k 条线段了，于是由归纳假设知，新图中共有偶数个奇点，因而原图中也有偶数个奇点，由此命题得证.

［**例 6**］ 设 $a_1,a_2,\cdots,a_{64}$ 是自然数 1，2，…，64 的一种排列，按下列方式构作 b_i，c_i，d_i，…，x.

$$
\begin{array}{ccccccc}
a_1 \quad a_2 & a_3 \quad a_4 & \cdots & a_{63} \quad a_{64} \\
b_1=|a_1-a_2| & b_2=|a_3-a_4| & \cdots & b_{32}=|a_{63}-a_{64}| \\
 & c_1=|b_1-b_2| & \cdots & c_{16}=|b_{31}-b_{32}| \\
 & & \cdots\cdots & \\
 & & \cdots & \\
 & & x &
\end{array}
$$

求证：x 为偶数.（1979 年北京市中学数学竞赛题）

证明 易见，$b_1,b_2,\cdots,b_{32}$ 的奇偶性与 $a_1+a_2,a_3+a_4,\cdots,a_{63}+a_{64}$ 的奇偶性相同. $c_1,c_2,\cdots,c_{16}$ 的奇偶性与 $a_1+a_2+a_3+a_4,a_5+a_6+a_7+a_8,\cdots,a_{61}+a_{62}+a_{63}+a_{64}$ 的奇偶性相同. ……依此类推，x 与 $a_1+a_2+\cdots+a_{64}$ 的奇偶性相同. 而 $a_1+a_2+\cdots+a_{64}=1+2+\cdots+64=(1+64)\times32$ 是偶数，故 x 是偶数.

说明 此题亦可由 x 倒推反证. 若 x 是奇数，则按题所述的计算过程中，倒数第二步里的两个数必是一奇一偶，而倒数第三步里的四个数只能是三奇一偶，或是一奇三偶，也就是说，这四个数里必有奇数个奇数. 仿此推知，在计算过程的每一步里，只能有奇数个奇数，最后推知原数列 $a_1,a_2,\cdots,a_{64}$ 中也有奇数个奇数，但事实上，1，2，…，64 中有 32 个奇数.“奇数＝偶数”产生矛盾，故反设不真. 即 x 只能是偶数.

［**例 7**］ 设有一条平面闭折线 $A_1A_2\cdots A_nA_1$，它的所有顶点 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 都是格点（格点是指纵横坐标都是整数的点），且 $|A_1A_2|=|A_2A_3|=\cdots=|A_{n+1}A_n|=|A_nA_1|$. 求证：$n$ 不可能是奇数.

证明 设顶点 A_i 的坐标是 (x_i,y_i)，其中 x_i 及 $y_i(i=1,2,$

$\cdots,n$)都是整数. 由题设有

$$
\begin{aligned}
&(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2\\
&\quad=(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2=\cdots\\
&\quad=(x_{n-1}-x_n)^2+(y_{n-1}-y_n)^2\\
&\quad=(x_n-x_1)^2+(y_n-y_1)^2\\
&\quad=M,
\end{aligned}
$$

其中 M 是固定整数. 令

$$
\begin{aligned}
&\alpha_1=x_1-x_2,\alpha_2=x_2-x_3,\cdots,\\
&\alpha_{n-1}=x_{n-1}-x_n,\alpha_n=x_n-x_1;\\
&\beta_1=y_1-y_2,\beta_2=y_2-y_3,\cdots,\\
&\beta_{n-1}=y_{n-1}-y_n,\beta_n=y_n-y_1,
\end{aligned}
$$

则

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=0, \quad ①$$

$$\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n=0, \quad ②$$

$$\alpha_1^2+\beta_1^2=\alpha_2^2+\beta_2^2=\cdots=\alpha_n^2+\beta_n^2=M. \quad ③$$

下面对①,②,③作奇偶性分析. 不妨设 $\alpha_i,\beta_i(i=1,2,\cdots,n)$中至少有一个是奇数. 否则,若 α_i,β_i 都是偶数,可设 $\alpha_i=2^{m_i}t_i,\beta_i=2^{k_i}t_i'(i=1,2,\cdots,n)$,其中 t_i,t_i'是奇数. m 是 $2n$ 个数:$m_1,m_2,\cdots,m_n,k_1,k_2,\cdots,k_n$ 中最小的数,用 2^m 去除 α_i,β_i,那么$\frac{\alpha_i}{2^m},\frac{\beta_i}{2^m}$中至少有一个奇数.

为确切起见,设 α_1 是奇数. 由 $\alpha_1^2+\beta_1^2=M$,则 $M=4k+1$ 或 $M=4k+2$(k 为整数).

若 $M=4k+1$,由③知,所有的 α_i,β_i 必为一奇一偶. 再由①和②,有

$$
\begin{aligned}
0&=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n+\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n\\
&=\text{偶数}+n\text{ 个奇数之和}.(n\text{ 为偶数})
\end{aligned}
$$

若 $n=4k+2$，则 α_i 和 β_i 必是奇数.

$0=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=n$ 个奇数之和.（n 是偶数）

综上讨论，可知 n 必为偶数，不可能是奇数.

［**例 8**］ 求证：前 n 个自然数的乘积能被它们的和整除的充要条件是：$n+1$ 不是一个奇素数.（1992 年加拿大数学奥林匹克试题）

证明 先证必要性：因 $1+2+\cdots+n$ 能整除 $n!$，即 $\frac{n(n+1)}{2}\Big|n!$. 若 $n+1$ 是奇素数，那么 $n+1$ 不整除 $n!$，从而 $\frac{n}{2}(n+1)\nmid n!$，矛盾. $\therefore n+1$ 不是奇素数.

再证充分性：当 $n+1=2$ 时，即 $n=1$ 时，结论显然成立. 当 $n+1>2$ 时，由于 $n+1$ 不是奇素数，因此 $n+1$ 是一个偶数，从而 $\frac{n+1}{2}\leqslant n-1$（$\because n\geqslant 3$），于是

$$\frac{n+1}{2}\Big|(n-1)!,\quad \frac{n(n+1)}{2}\Big|n!,$$

即 $1+2+\cdots+n$ 整除 $n!$

2. 判别整数的整除性

［**例 1**］ 求证：3^n+1 能被 2 或 2^2 整除，而不能被 2 的更高次幂整除.（1909 年匈牙利数学竞赛题）

分析 只要证明 3^n+1 是 2 的奇数倍或 4 的奇数倍，可将 n 分成奇数和偶数分别讨论.

证明 当 n 为偶数时，设 $n=2k$.

$$\because\quad 3^n+1=3^{2k}+1=9^k+1=(8+1)^k+1$$
$$=(8m+1)+1=2(4m+1),$$

$\therefore\quad 2\mid(3^n+1)$.

当 n 为奇数时，设 $n=2k+1$，

$$\because \quad 3^{2k+1}+1=3\cdot 3^{2k}+1=3(8m+1)+1$$
$$=4(6m+1),$$

$$\therefore \quad 2^2|(3^n+1).$$

由于 $4m+1$，$6m+1$ 都是奇数，所以 3^n+1 不能被 2 的更高次幂整除. 故不论 n 为奇数，还是偶数，命题均成立.

［**例 2**］ 有 n 个数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，它们中的每一个数要么是 1，要么是 -1. 若 $x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_{n-1}x_n+x_nx_1=0$，求证 n 是 4 的倍数.（1959 年莫斯科数学竞赛题）

证明 先证 n 为一偶数. $\because$ $x_1,x_2,\cdots,x_n$不外 $+1$ 与 -1 两种情况，$\therefore$ 下列 n 个数 $x_1x_2,x_2x_3,\cdots,x_{n-1}x_n,x_nx_1$ 也不外是 $+1$ 与 -1 两种情况，它们的和为 0，说明其中 $+1$ 的个数等于其中 -1 的个数，$\therefore$ $n=2k(k\in N)$.

下面来证 k 也是一个偶数. 设 $x_1x_2=1$，这时 $x_1=x_2=1$，或 $x_1=x_2=-1$，这说明 x_1,x_2 的符号没有发生变化. 又设 $x_1x_2=-1$，$\therefore$ $x_1=1,x_2=-1$ 若 $x_1=-1,x_2=1$，这说明 x_1，x_2 的符号相反. 既然在 $x_1x_2,x_2x_3,\cdots,x_{n-1}x_n,x_nx_1$ 中有 k 个 -1，说明从 x_1 开始到 x_2，再到 x_3，…，最后到 x_1，这样一个过程中发生了 k 次符号的变号，由于 x_1 与它本身总是同号，$\therefore$ k 必须是偶数（若 k 为奇数，经过 k 次变号后，x_1 应变为 $(-1)^kx_1=-x_1$，不等于 x_1 了）. 证毕.

另证 同上法可证 n 为一偶数. 不妨设 $n=2k$（k 为自然数）. 下面来证明 k 也是一个偶数.

由于 $(x_1x_2)(x_2x_3)\cdots(x_{n-1}x_n)(x_nx_1)=(x_1x_2\cdots x_n)^2>0$，$(x_1x_2)(x_2x_3)\cdots(x_{n-1}x_n)(x_nx_1)=(-1)^k\cdot(+1)^k=(-1)^k$，$\therefore$ k必须为偶数，从而 n 是 4 的倍数.

［**例 3**］ （1）有 n 个整数，其积为 n，其和为 0. 求证：整

数 n 能被 4 整除；

(2) 设 n 为被 4 整除的自然数. 求证：可以找到 n 个整数，使其积为 n，其和为零.（第 18 届全苏中学生数学竞赛题）

证明 (1) 设 n 个整数为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，由题意得

$$a_1a_2\cdots a_n=n,\quad a_1+a_2+\cdots+a_n=0.$$

如果 n 为奇数，那么 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 均为奇数，于是 $a_1+a_2+\cdots+a_n$是奇数个奇数的和，不可能为 0，所以 n 必为偶数，从而 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中至少有一个是偶数. 又若 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中只有一个偶数，设为 a_1，则 $a_2+a_3+\cdots+a_n$ 是奇数个($n-1$ 个)奇数之和，故必为奇数，从而 $a_1+a_2+\cdots+a_n$ 是奇数，与 $a_1+a_2+\cdots+a_n=0$矛盾. 故 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中至少有两个偶数，所以 $n=a_1a_2\cdots a_n$ 能被 4 整数.

(2) 设 $n=4k$. 当 k 为奇数时，

$$n=2\cdot(-2k)\cdot 1^{3k-2}\cdot(-1)^k,$$

而 $2,-2k,(3k-2)$个 1 与 k 个 -1 共 $4k$ 个数之和为零.

当 k 为偶数时，

$$n=(-2)(-2k)\cdot 1^{3k}\cdot(-1)^{k-2},$$

而 $-2,-2k,3k$ 个 1 与$(k-2)$个 -1 共 $4k$ 个数之和为零.

［**例 4**］ 设 a,b,c,d 是整数，且数 $ac,bc+ad,bd$ 都能被某整数 u 整除. 求证：bc 和 ad 也都能被 u 整除.

证明 由于$(bc-ad)^2=(bc+ad)^2-4abcd$，有

$$\left(\frac{bc-ad}{u}\right)^2=\left(\frac{bc+ad}{u}\right)^2-4\cdot\frac{ac}{u}\cdot\frac{bd}{u}$$

又 $ac,bd,bc+ad$ 都能被 u 整除，则

$$s=\frac{bc+ad}{u},\ p=\frac{ac}{u},\ q=\frac{bd}{u}$$

都是整数，即

$$\left(\frac{bc-ad}{u}\right)^2=s^2-4pq.$$

于是$\frac{bc-ad}{u}$也是整数. 设$t=\frac{bc-ad}{u}$，则$t^2=s^2-4pq$，$s^2-t^2=4pq$，$(s+t)(s-t)=4pq$. 由于$s-t$与$s+t$具有相同的奇偶性，$4pq$为偶数，则$s-t$与$s+t$都是偶数. 从而

$$\frac{s+t}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{bc+ad}{u}+\frac{bc-ad}{u}\right)=\frac{bc}{u},$$

$$\frac{s-t}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{bc+ad}{u}-\frac{bc-ad}{u}\right)=\frac{ad}{u}$$

都是整数，即bc和ad都能被u整除.

[**例 5**] 问：怎样的正整数n，使得$M=20^n+16^n-3^n-1$能被 323 整除？（第 20 届莫斯科数学竞赛题）

证明 ∵ $323=17\times19$，当n为正偶数，即$n=2k$时，20^n-3^n能被$20-3=17$整除，又$16^n-1=16^{2k}-1=256^k-1=(256-1)N_1=17\times15\times N_1$，即$16^n-1$也能被 17 整除，∴ 当$n$为偶数时，$M$能被 17 整除.

另一方面，20^n-1能被$20-1=19$整除，又$16^n-3^n=16^{2k}-3^{2k}=(256-9)N_2=19\times13\times N_2$，即$16^n-3^n$也能被 19 整除，∴ 当$n$为偶数时，$M$能被 19 整除. 易知$(17,19)=1$，∴ 当$n$为偶数时，$M$能被$17\times19=323$整除.

当n为正奇数，即$n=2k+1$时，易知20^n-3^n能被 17 整除，但$16^n-1=16^{2k+1}-1=16^{2k+1}-16+15=16(16^{2k}-1)+15$，由前面知，$16^{2k}-1$能被 17 整除，而 15 与 17 是互素的，∴ $17\nmid(16^n-1)$，即$17\nmid M$，∴ $323\nmid M$.

∴ 当且仅当n为正偶数时，$20^n+16^n-3^n-1$能被 323 整除.

[**例 6**] 求证：101010…101（含k个 0 及$k+1$个 1，$n\geqslant$

2)为合数.(1985 年第 11 届全俄数学竞赛题)

分析 由合数的定义,我们要证明一个数是合数,只要证明这个数能分解成两个大于 1 的整数的乘积就可以了.

证明 记此数为 x_k,则

$$\begin{aligned}x_k &= 101010\cdots101\\ &= 100^k + 100^{k-1} + \cdots + 100 + 1\\ &= \frac{(10^{k+1})^2 - 1}{99} = \frac{(10^{k+1} + 1)(10^{k+1} - 1)}{99}.\end{aligned}$$

下面对 k 分为奇数和偶数进行讨论.

(i) 当 k 为偶数时,则 $k+1$ 为奇数,于是

$$x_k = \frac{10^{k+1} + 1}{11} \cdot \frac{10^{k+1} - 1}{9},$$

因此,$10^{k+1} + 1$ 当 $k+1$ 为奇数时,能被 $10+1=11$ 整除,$10^{k+1}-1$ 当 $k+1$为正整数时,能被 $10-1=9$ 整除.

$\therefore$ $\dfrac{10^{k+1}+1}{11}$与$\dfrac{10^{k+1}-1}{9}$都是正整数.

又由 $k \geqslant 2$ 可得

$$\frac{10^{k+1} + 1}{11} > 1, \quad \frac{10^{k+1} - 1}{9} > 1,$$

于是 x_k 为合数.

(ii) 当 k 为奇数时,则 $k+1$ 为偶数,于是

$$x_k = \frac{10^{k+1} - 1}{99}(10^{k+1} + 1).$$

设 $k+1=2t$,则

$$x_k = \frac{10^{2t} - 1}{99}(10^{k+1} + 1) = \frac{100^t - 1}{99}(10^{k+1} + 1).$$

$\because$ $100^t - 1$ 能被 99 整除,又由 $k+1 \geqslant 4$,从而 $t \geqslant 2$,$\dfrac{100^t-1}{99}$是大于 1 的正整数,而 10^{k+1}也是大于 1 的正整数,于是 x_k 为合

数.

由(i),(ii)知,x_k 对 $k\geqslant 2$ 都是合数.

事实上,可以计算出

当 k 为偶数时,$x_k=\underbrace{11\cdots1}_{\text{共}k+1\text{位}}\times\underbrace{9090\cdots9091}_{\text{共}k\text{位}}$;

当 k 为奇数时,$x_k=101\times\underbrace{1000100010001\cdots10001}_{\text{共}2k-1\text{位}}$.

[**例 7**] 对任何整数 n,求证:$5^n+2\cdot 3^{n-1}+1$ 能被 8 整除.

证明 (i) 当 n 为奇数时,令 $n=2k+1$,则

$$
\begin{aligned}
5^n+2\cdot 3^{n-1}+1 &= 5^{2k+1}+2\cdot 3^{2k}+1 \\
&= (5^{2k+1}+3^{2k+1})-(3^{2k}-1) \\
&= (5+3)(5^{2k}-5^{2k-1}\cdot 3+\cdots+3^{2k}) \\
&\quad -(9-1)(9^{k-1}+9^{k-2}+\cdots+1),
\end{aligned}
$$

由此可知,当 n 为奇数时,$5^n+2\cdot 3^{n-1}+1$ 能被 8 整除.

(ii) 当 n 为偶数时,令 $n=2k$ 时,则

$$
\begin{aligned}
&5^n+2\cdot 3^{n-1}+1 \\
&= 5\cdot 5^{2k-1}+5\cdot 3^{2k-1}-3\cdot 3^{2k-1}+1 \\
&= 5(5^{2k-1}+3^{2k-1})-(3^{2k}-1) \\
&= 5(5+3)(5^{2k-2}-5^{2k-3}\cdot 3+\cdots+3^{2k-2}) \\
&\quad -(9-1)(9^{k-1}+9^{k-2}+\cdots+1),
\end{aligned}
$$

由此可见,当 n 为偶数时,$5^n+2\cdot 3^{n-1}+1$ 能被 8 整除.

由(i),(ii)知,对所有正整数 n,$5^n+2\cdot 3^{n-1}+1$ 能被 8 整除.

[**例 8**] 求证一个三边长均为整数的直角三角形,其边长的积是 60 的倍数.(1990 年西班牙第 27 届数学奥林匹克试题)

证明 设这样的三角形的三边长为 m^2+n^2，m^2-n^2，$2mn$，则三边长之积 S 为

$$S=2mn(m^2-n^2)(m^2+n^2)=2mn(m^4-n^4).$$

若 m,n 同奇同偶，则 m^2-n^2 必为偶数，S 可被 4 整除.

若 m,n 一奇一偶，则 $2mn$ 可被 4 整除，也即 S 可被 4 整除.

故不论 m,n 的奇偶性如何，S 均可被 4 整除.

又 m,n 中至少有一个被 3 整除，则 S 可被 3 整除. 若 m,n 均不能被 3 整除，即有

$$m\equiv 1 \quad 或 \quad m\equiv 2 \pmod 3.$$

这时，$m^2\equiv 1$ 或 $m^2\equiv 4\equiv 1 \pmod 3$，因而 $m^2\equiv 1 \pmod 3$. 同理得 $n^2\equiv 1 \pmod 3$，从而 $m^2-n^2\equiv 0 \pmod 3$. ∴ S 可被 3 整除.

又 m,n 有一个能被 5 整除，则 S 能被 5 整除. 若 m,n 均不能被 5 整除，则由 $a^{p-1}\equiv 1 \pmod p$ 可知，$m^4\equiv 1$，$n^4\equiv 1 \pmod 5$，即 S 可被 5 整除.

再由 3，4，5 两两互质，故知 S 可被 $3\times 4\times 5=60$ 所整除.

3. 判别方程是否有整数解

［**例 1**］ 求证：方程 $2x^2-5y^2=7$ 没有整数解.

证明 设方程有整数根，则 y 应是奇数，可设为 $y=2k+1$，则 $2x^2-5(2k+1)^2=7$，即

$$x^2-10k^2-10k=6,$$

可知 x 是偶数，设 $x=2m$，则 $(2m)^2-10k^2-10k=6$，即 $2m^2-5k(k+1)=3$. 但 $k(k+1)$ 是一个偶数，而两个偶数之差不可能等于奇数，故此式不成立. 从而原方程没有整数解.

［例 2］ 是否存在这样的自然数 m,n，满足关系式 $\frac{m^2-n^2}{2}=1993$？

解 原方程即为

$$m^2-n^2=(m+n)(m-n)=3986.$$

∵ 3986 是偶数，∴ $(m+n)(m-n)$ 为偶数，故 m,n 或者同为奇数，或者同为偶数.

(i) 当 m,n 都为偶数时，即 $m=2q_1,n=2q_2$，则

$$(m+n)(m-n)=4(q_1-q_2)(q_1+q_2),$$

即 $$4(q_1-q_2)(q_1+q_2)=2\times1993,$$

$$\therefore\quad 2(q_1-q_2)(q_1+q_2)=1993,$$

又 $(q_1-q_2)(q_1+q_2)$ 是整数，∴ 偶数＝奇数，矛盾.

(ii) 当 m,n 都是奇数时，即 $m=2q_1+1,n=2q_2+1$，那么

$$\begin{aligned}&(m+n)(m-n)\\&=[(2q_1+1)+(2q_2+1)]\\&\quad\cdot[(2q_1+1)-(2q_2+1)]\\&=4(q_1-q_2)(q_1+q_2+1)=2\times1993,\end{aligned}$$

$$\therefore\quad 2(q_1-q_2)(q_1+q_2+1)=1993.$$

∵ $(q_1-q_2)(q_1+q_2+1)$ 是整数，∴ 偶数＝奇数，这是不可能的.

综上所述，不存在整数 m,n，满足方程

$$\frac{m^2-n^2}{2}=1993.$$

［例 3］ 求证：不论 n 是什么整数，方程 $x^2-16nx+7^s=0$ 没有整数解，其中 s 是正奇数.（1962 年北京市高二数学竞赛题）

证明 若方程有整数解，设为 x_1，则另一根 x_2 也是整数，且

$$x_1+x_2=16n, \quad ①$$

$$x_1x_2=7^s. \quad ②$$

由②知，x_1,x_2 可以写成

$$x_1=\pm 7^i, x_2=\pm 7^j, \quad ③$$

这两式同正同负．$\because$ $i+j=s$（奇数），$\therefore$ i,j 必为一奇一偶，$i\neq j$．不妨设 $i>j$，将③代入①，得

$$x_1+x_2=\pm(7^i+7^j)=\pm 7^j(7^{i-j}+1)=16n.$$

$\because$ i,j 一奇一偶，$\therefore$ $i-j$ 是奇数．

$\therefore$ $7^{i-j}+1=(7+1)(7^{i-j-1}-7^{i-j-2}+\cdots+1)$．

上式中，第二个括号是奇数个奇数之和，故是奇数，记为 m，$\therefore$ $\pm 7^j\cdot 8\cdot m=16n$，即 $\pm 7^j\cdot m=2n$．此式右边是偶数，而左边是奇数，矛盾．证毕．

［**例 4**］ 求证：不存在这样的整数 a,b,c,d，满足方程组：

$$\begin{cases} abcd-a=\underbrace{19911991\cdots1991}_{1991\text{个}1991}, & ① \\ abcd-b=\underbrace{19931993\cdots1993}_{1993\text{个}1993}, & ② \\ abcd-c=\underbrace{19951995\cdots1995}_{1995\text{个}1995}, & ③ \\ abcd-d=\underbrace{19971997\cdots1997}_{1997\text{个}1997}. & ④ \end{cases}$$

证明 由①，得 $a(bcd-1)=$奇数，$\therefore$ a 为奇数．同理，由②，③，④知 b,c,d 都是奇数．

$\because$ a,b,c,d 都是奇数，$\therefore$ 由①得

$$abcd-a=\text{奇数}-\text{奇数}=\text{偶数}\neq\text{奇数},$$

$\therefore$ 不可能有整数 a,b,c,d 同时满足方程组中的四个方程．

［例 5］ 求证：不存在整数 $x_1, x_2, \cdots, x_{14}$，使等式 $x_1^4+x_2^4+\cdots+x_{14}^4=1599$ 成立.（1979 年美国数学竞赛题）

证明 用反证法. 假设存在整数 $x_1, x_2, \cdots, x_{14}$ 使上式成立. 在上式两边加上 1，得

$$1+x_1^4+x_2^4+\cdots+x_{14}^4=1600.$$

由于 $x_i(i=1,2,\cdots,14)$ 为整数，要么是奇数，要么是偶数. 若 x_i 为偶数，x_i^2 能被 4 整除，故 $x_i^4=(x_i^2)^2$ 就能被 16 整除；若 x_i 为奇数，则 x_i^2 被 8 除余 1，∴ $x_i^2=8k+1$（k 为整数），从而 $x_i^4=(x_i^2)^2=(8k+1)^2=64k^2+16k+1=16(4k^2+k)+1$，即 x_i^4 被 16 除余 1，这样，不论 x_i 分别是怎样的整数，$1+x_1^4+x_2^4+\cdots+x_{14}^4$ 被 16 除余数只能在 1 与 15 之间，即此式不能被 16 整除，但 1600 能被 16 整除，所以，

$$1+x_1^4+x_2^4+\cdots+x_{14}^4\neq 1600,$$

这一矛盾说明原方程没有整数解.

［例 6］ a,b,c 为整数，$a\neq 0$，已知二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有有理数根，求证：a,b,c 中，至少有一个是偶数.（1958～1959 年波兰数学竞赛题）

证明 令 $x=\frac{y}{a}$，代入原方程的左边，得

$$y^2+by+ac=0.$$

由于原方程有有理数根，故上述关于 y 的二次方程也有有理根，设它为 $\frac{q}{p}$，其中 p 与 q 是既约的.

我们来证明 $p=1$，即指出这有理根实际上是整数根. 用反证法，假如 $p>1$，将 $y=\frac{q}{p}$ 代入方程，并化简得 $q^2+bpq+acp^2=0$，即 $p(bq+acp)=-q^2$. ∴ p 可整除 q，这与 p 及 q 是既约的整数相矛盾. 这一矛盾表明，只能 $p=1$. 可设方程 y^2+

$by+ac=0$ 有整数根 y_1，另一根设为 y_2. 由韦达定理，可知

$$y_1+y_2=-b,\ y_1y_2=ac.$$

由前一式可知，y_2 也是整数（$\because\ y_2=-(b+y_1)$）. 由以上二式知 $(y_1+y_2)y_1y_2=-abc$.

如果 y_1,y_2 之中至少有一个偶数，那么 abc 为偶数；如果 y_1 与 y_2 都是奇数，那么 y_1+y_2 也是偶数，所以 abc 仍为偶数. 总之，abc 必是偶数，这就证明了 a,b,c 不可能都是奇数.

［**例 7**］ 是否存在整数 m,n，使得

$$5m^2-6mn+7n^2=2003?$$

解 首先，容易证明：当 m,n 都是奇数，或者都是偶数时，所给方程的左边是偶数. 而 2003 是奇数，这是不可能的. 所以 m,n 一奇一偶，从而 $(m+n)$ 与 $(m-n)$ 都是奇数.

将方程改写为

$$4(m-n)^2+(m+n)^2+2n^2=2003. \qquad ①$$

下面分两种情况讨论：

(i) 若 n 为偶数时，记 $n=2k,m-n=2l+1,m+n=2p+1$. 则由①式得

$$4(2l+1)^2+(2p+1)^2+2(2k)^2=2003,$$

即 $$16(l^2+l)+4+4p(p+1)+1+8k^2=2003.$$

$\because\ p(p+1)$ 是偶数，故上式可改写为

$$8M+5=2003,$$

但 2003 被 8 除余 3，故上式不可能成立.

(ii) 若 n 为奇数，类似可求得①式左边是 $8k+7$，从而也导致矛盾.

综上讨论，满足要求的整数 m,n 不存在.

［**例 8**］ 对于整系数多项式 $f(x)=x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}$

$+\cdots+p_n$，若 $f(0)$，$f(1)$都是奇数，则 $f(x)$没有有理数根.(1971 年第三届加拿大中学数学竞赛题)

证明 $\because f(0), f(1)$是奇数，$\therefore p_n, 1+p_1+p_2+\cdots+p_n$ 是奇数.

(i) 设 x 为偶数，那么 x^k 是偶数，于是 $p_i x^{n-i}(i=1,2,\cdots,n-1)$也是偶数，于是

$$f(x)=\text{偶数}+p_n=\text{偶数}+\text{奇数}\neq 0,$$

即 $f(x)\neq 0$，$\therefore f(x)$没有偶数根.

(ii) 若 x 为奇数，令 $x=2m+1(m\in Z)$，则 $x^k=(2m+1)^k=$偶数$+1(k=1,2,\cdots,n)$，$p_i x^{n-i}=p_i\cdot$(偶数$+1$)$=$偶数$+p_i(i=1,2,\cdots,n-1)$，

$$\begin{aligned}\therefore\quad f(x)&=x^n+\sum_{i=1}^{n}p_i x^{n-i}\\&=\text{偶数}+(1+p_1+p_2+\cdots+p_n)\\&=\text{偶数}+\text{奇数}\neq 0,\end{aligned}$$

可见，$f(x)$没有奇数根.

由(i)，(ii)知 $f(x)$没有整数根.

又 $f(x)$的首项系数为 1，$\therefore f(x)$不可能有分数根，故问题得证.

[**例 9**] 求证：正整数 a 与 b 的乘积为偶数的充分必要条件是：存在正整数 c 与 d，使得 $a^2+b^2+c^2=d^2$.(1984 年前联邦德国数学竞赛题)

分析 $\because a, b$ 为正整数，$\therefore$ 其乘积 ab 如果是偶数时，则 a, b 都为偶数，或 a, b 中只有一个是偶数.在这种讨论中，我们设法证明确实存在正整数 c, d 能够使 $a^2+b^2+c^2=d^2$ 成立，这是证明必要性，还应再证充分性，即需要证明如果有 c，d 使 $a^2+b^2+c^2=d^2$ 成立时，那么 ab 应该是偶数.

证明 (1) 充分性:如果有正整数 c 与 d,使得

$$a^2 + b^2 + c^2 = d^2 \qquad ①$$

成立.这时 a 与 b 中至少有一个为偶数.不然的话,假设 a, b 都为奇数,那么 a^2+b^2 被 4 除的余数为 2,这时 $a^2+b^2+c^2$ 被 4 除的余数或者为 2(当 c 是偶数时)或者为 3(当 c 是奇数时).

但①式右边的 d^2 被 4 除余数只能是 0(当 d 为偶数时)或者余数是 1(当 d 是奇数时).

这就是说①式不能成立,所以假设 a, b 都为奇数是不成立的,即 a 与 b 中至少有一个是偶数.

(2) 必要性:设 ab 为偶数,那么 a 与 b 中至少有一个为偶数.下面再分两种情形讨论:

(i) 如果 a,b 都是偶数,因为偶数的平方仍为偶数,偶数+偶数=偶数,所以可设

$$a^2 + b^2 = 4n = (n + 1) - (n - 1)^2, (n \text{ 是正整数})$$

这时,可取 $c=n-1$, $d=n+1$.

(ii) 如果 a, b 中仅有一个为偶数,因为偶数的平方仍为偶数,奇数的平方仍为奇数,偶数+奇数=奇数,所以可设

$$a^2 + b^2 = 2n + 1 = (n + 1)^2 - n^2, (n \text{ 为正整数})$$

这时,可取 $c=n^2$, $d=(n+1)^2$.

总之,不论哪种情况,当 ab 为偶数时,总有正整数 c, d,使得 $a^2+b^2+c^2=d^2$ 成立.

说明 关于代数变换技巧

$$4n = (n + 1)^2 - (n - 1)^2,\ 2n + 1 = (n + 1)^2 - n^2$$

应熟练掌握.

4. 解不定方程

[**例 1**] 求方程 $x^y+1=z$ 的质数解.

分析 最小的质数是偶数 2,其余的质数均为奇数,考虑原方程的奇偶关系,并运用质数的性质求解.

解 首先,y 必须是偶数.否则,由 x^y+1 能被 $x+1$ 整除,且 $x^y+1>x+1>1$,知 x^y+1 可以分解,即 x^y+1 不等于质数 z.但 y 又是质数,∴ $y=2$.

$$\because\quad z=x^y+1=x^2+1\geqslant 2^2+1=5,$$

$$\therefore\quad z \text{ 为奇质数,于是 } x^2=z-1 \text{ 为偶数},$$

$$\therefore\quad x=2,\ z=5.$$

故原方程的质数解为 $x=2,y=2,z=5$.

[**例 2**] 一个自然数,若加上 168 是一个完全平方数,若加上 100 则是另一个完全平方数,求这个自然数.

解 设所求的自然数为 x,则依题意有

$$x+168=m^2 \quad \text{且} \quad x+100=n^2,$$

其中 m,n 都为自然数.两式相减得

$$m^2-n^2=68,$$

$$\therefore\quad (m+n)(m-n)=1\times 68=2\times 34=4\times 17.$$

显然 $m-n$ 与 $m+n$ 同奇同偶,∴ $m-n$ 与 $m+n$ 只能取 2 和 34,又 $m-n<m+n$,

$$\therefore\quad \begin{cases} m-n=2, \\ m+n=34; \end{cases} \text{解得} \begin{cases} m=18, \\ n=16. \end{cases}$$

故所求的自然数为 $x=18^2-168=156$.

[**例 3**] 求 $x^2+y^2=328$ 的正整数解.

解 设 x, y 是它的正整数解,显然 $x\neq y$,且均不为 0,不

妨设 $x>y>0$(由对称性).

∵ 328 是偶数,则 x,y 的奇偶性相同,于是 $x\pm y$ 是偶数. 令 $x+y=2u_1$, $x-y=2v_1$,显然,u_1,v_1 是正整数,且 $u_1>v_1$. 将 $x=u_1+v_1$, $y=u_1-v_1$ 代入原方程,整理后得

$$u_1^2+v_1^2=164.$$

同理,又可令 $u_1+v_1=2u_2$, $u_1-v_1=2v_2$,其中 u_2, v_2 为正整数,$u_2>v_2$,于是代入又可得

$$u_2^2+v_2^2=82.$$

再令 $u_2+v_2=2u_3$,$u_2-v_2=2v_3$,又可得

$$u_3^2+v_3^2=41.$$

这时 u_3, v_3 必一奇一偶,且 $0<v_3<u_3\leqslant[\sqrt{41}]=6$. 取 $v_3=1,2,3,4,5$,代入 $u_3^2=41-v_3^2$ 得

$$u_3^2=40,37,32,25,16,$$

故只能有 $u_3^2=25,16$,即 $u_3=5,4$. 再注意到 $u_3>v_3$,故 $u_3=5$,从而 $v_3=4$,于是得到 $x=18,y=2$. 由方程的对称性知 $x=2$,$y=18$ 也是解. 故原方程的正整数解为

$$x=18,\ y=2;\ x=2,\ y=18.$$

[**例 4**] 求证方程

$$x^3-2y^3-4z^3=0 \qquad ①$$

只有一组整数解 $x=y=z=0$.

证明 设有整数 x, y, z 满足①式,则有

$$x^3=2y^3+4z^3,$$

可见 x 为偶数. 设 $x=2x_1$(x_1 为整数),代入①整理得

$$y^3=4x_1^3-2z^3, \qquad ②$$

可见 y 为偶数. 设 $y=2y_1$(y_1 为整数),代入②式并整理得

$$z^3=2x_1^3-4y_1^3, \qquad ③$$

可见 z 也为偶数. 设 $z=2z_1$，代入③，得

$$x_1^3-2y_1^3-4z_1^3=0,$$

这说明 $x_1=\frac{x}{2}$，$y_1=\frac{y}{2}$，$z_1=\frac{z}{2}$仍满足方程①.

根据上述奇偶性分析，x_1，y_1，z_1 仍是偶数. 且 $x_2=\frac{x_1}{2}$，$y_2=\frac{y_1}{2}$，$z_2=\frac{z_1}{2}$仍是满足①的整数. 重复上述过程知 x_2，y_2，z_2 都为偶数，且 $x_3=\frac{x_2}{2}$，$y_3=\frac{y_2}{2}$，$z_3=\frac{z_2}{2}$仍满足①. 注意到 $x_3=\frac{x_2}{2}=\frac{x_1}{4}=\frac{x}{8}$，$y_3=\frac{y_2}{2}=\frac{y_1}{4}=\frac{y}{8}$，$z_3=\frac{z_2}{2}=\frac{z_1}{4}=\frac{z}{8}$，将上述过程重复下去，就得到每个自然数 n，都有$\frac{x}{2^n}$，$\frac{y}{2^n}$，$\frac{z}{2^n}$为偶数，这只有 $x=y=z=0$ 才有可能，x，y，z 不全为零时是不可能满足①式的，所以①无非零解.

故原方程有唯一解 $x=y=z=0$.

上面证明的方法叫做无穷递降法，其基本思路是：只要有解，就有更小(绝对值)的解，无限地递降下去都是解，从而引出矛盾. 下面的例题也要用无穷递降法求解.

[**例 5**] 求证：对于整数 x，y，z，等式 $x^2+y^2+z^2=2xyz$ 只有当 $x=y=z=0$ 时才能成立.（第 12 届莫斯科数学竞赛题）

证明 显然方程有 $x=y=z=0$ 的整数解. 下面证明这是唯一的一组整数解.

若不然，设 x_0，y_0，z_0 是方程的另一个整数解，则由 $x_0^2+y_0^2+z_0^2=2x_0y_0z_0$ 知 x_0，y_0，z_0 中至少有一个是偶数，由对称性，不妨设 $x_0=2x_1$，代入上述方程，整理后，得

$$y_0^2+z_0^2=4x_1(y_0z_0-x_1). \qquad ①$$

由此知 y_0, z_0 必都为偶数(否则,与①中右端是 4 的倍数矛盾),故又可令 $y_0=2y_1$, $z_0=2z_1(x_0=2x_1)$,代入原方程得

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2=2x_1y_1z_1.$$

这就表明,若 x_0, y_0, z_0 是方程的解,则 x_0, y_0, z_0 必全为偶数,且$\frac{x_0}{2}$, $\frac{y_0}{2}$, $\frac{z_0}{2}$也是方程的解.重复上述过程得,对任意自然数 n, $\frac{x_0}{2^n}$, $\frac{y_0}{2^n}$, $\frac{z_0}{2^n}$全为偶数且为方程的解.这时,只有 $x_0=y_0=z_0=0$ 才行.因而原方程只有唯一的一组整数解 $x=y=z=0$.

5. 在几何中的应用

在某些几何或图论问题中,需要判断或证明某些几何对象的个数是奇数或偶数,常用的方法是,把几何对象代数化,然后运用奇偶性分析的方法使问题得到解决.

[**例 1**] 能否把平面上的凸 11 边形的每一顶点用 3 条对角线分别与另三个不相邻的顶点相连接?

证明 用反证法证明不可能作这样的连接.假设可以连接的话,设所用对角线的条数为 N.因每条对角线的两端有两个顶点,所以被 N 条对角线所连接着的顶点共出现 $2N$ 次.另一方面,每一个顶点恰好出现 3 次,共应出现 $3\times11=33$ 次,$\therefore 2N=33$,导致偶数=奇数,矛盾.从而证得这样的连接是不可能的.

一般地,设 m, n 为奇数,平面上的凸 n 边形不能用对角线把每一顶点与另 m 个顶点连接.

[**例 2**] 圆周上有 1993 个点,给每一个点染两次颜色,或红、蓝,或全红,或全蓝.最后统计知:染红色 1993 次,染蓝

色 1993 次. 求证:至少有一点被染上红、蓝两种颜色.

证明 假设没有一点被染上红、蓝两种颜色,即第一次染红(或蓝),第二次仍染红(或蓝). 不妨设第一次有 m 个点($0 \leqslant m \leqslant 1993$)染红,第二次仍有且仅有这 m 点染红,即有 $2m$ 个红点. 但是 $2m \neq 1993$.

所以,至少有一点被染上红、蓝两种颜色.

[**例 3**] 在线段 AB 的两个端点,一个标以红色,一个标以蓝色,在线段中间插入 n 个分点,在各个分点上随意地标上红色或蓝色,这样就把原线段分为 $n+1$ 个不重叠的小线段,这些小线段的两端颜色不同者叫做标准线段. 求证:标准线段的个数是奇数. (1979 年安徽省中学数学竞赛题)

证明 设 n 个分点依次是 $A_1, A_2, \cdots, A_n$. 这 $n+1$ 个线段分别为

$$AA_1 = A_0A_1,\ A_1A_2,\ \cdots, A_{n-1}A_n, A_nB = A_nA_{n+1}.$$

设最后一个标准线段为 A_kA_{k+1}. 若 $A_k = A_0$,则仅有一个标准线段,命题显然成立;若 $A_0 = A_k$,由 A, B 不同色,则 A_0 必与 A_k 同色,不妨设 A_0 与 A_k 均为红色,那么在 A_0 和 A_k 之间若有一红蓝的标准线段,必有一蓝红的标准线段与之对应;否则 A_k 不能为红色,所以在 A_0 和 A_k 之间,红蓝和蓝红的标准线段就成对出现,即 A_0 和 A_k 之间的标准线段的个数是偶数,加上最后一个标准线段 A_kA_{k+1},所以,A 和 B 之间的标准线段的个数是奇数.

利用方格纸作折线的方法也可证明本题的结论.

因为线段 AB 的长度及各小线段是否等长与证题无关,因此,不妨设 AB 长为 $n+1$ 个单位,各小线段的长均为 1 个单位. 以 A 为坐标原点,AB 为 x 轴建立直角坐标系. 对于包括 A,B 在内的 $n+2$ 个点,若标红色则取其纵坐标为 0,标蓝

色则取其纵坐标为 1，横坐标不变. 不失一般性，设 A 标以红色而 B 标以蓝色，顺次连接这 $n+2$ 个整点得到一条起点在 x 轴上，终点在 $y=1$ 直线上的折线，其中斜率为 $+1$ 或 -1 的每小段是标准线段，斜率等于 0 的每小段是非标准线段. 显然，从 A 出发每经过两条标准线段回到 x 轴，故只有经过奇数条标准线段才能结束于在 $y=1$ 直线上的 B 点，所以，标准线段的条数是奇数.

[**例 4**] 在平面上任意给出五个整数点. 求证：其中必有两点，连结它们的线段的中点也是整点.

证明 只须对点的两个坐标进行奇偶性分析，证明的途径就一目了然了.

如果把每个点 (x, y) 的两个坐标按奇偶性分类，只能是如下四种情况之一：

（奇，奇），（偶，偶），（奇，偶），（偶，奇）.

由于给定了五个整点，因此其中至少有两点，它们的坐标的奇偶状况属于上述四类中的同一类，即必有两点 (x_1, y_1) 与 (x_2, y_2)，其中 x_1 与 x_2 有相同的奇偶性，y_1 与 y_2 也有相同的奇偶性. 因此，x_1+x_2 与 y_1+y_2 都是偶数，它们都可以被 2 整除. 由中点公式，这两点的中点可表示为 $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$，显然，两个坐标都是整数，从而是一个整数点.

把上述问题进一步推广，考虑下面的例题.

[**例 5**] 平面上任给 13 个整点. 求证：必存在四个整点，使得这 4 个点的几何重心也是整点.

证明 我们知道，有限个点的几何重心的两个坐标，分别是有限个点的坐标的算术平均值. 在 13 个整点中任取 5 个点，由例 4 必有两个点 P_1，P_2，其连线的中点也是整点，在剩

下的 13－2＝11 个整点中，任取 5 个整点，由例 4，又得 P_3，P_4，其连线的中点是整点，再在剩下的 9 个点中，任取 5 个，亦得 P_5，P_6，其连线的中点是整点，……，如此继续，得 P_1，P_2，…，P_9，P_{10}，其中 P_{2i-1} 与 $P_{2i}(i=1,2,3,4,5)$ 的连线的中点是整点，记这些中点分别为 Q_1，Q_2，Q_3，Q_4，Q_5，其坐标计算规律均为

$$Q_i=\frac{Q_{2i-1}+P_{2i}}{2}(i=1,2,3,4,5).$$

由例 4，在上述 5 个整点中，必有两点，不妨设为 Q_1，Q_3，其连线的中点是整点，即

$$\frac{Q_1+Q_3}{2}=\frac{\frac{P_1+P_2}{2}+\frac{P_5+P_6}{2}}{2}=\frac{P_1+P_2+P_5+P_6}{4}.$$

（注意：上式表示两个坐标的计算规律）故存在四个点 P_1、P_2，P_5，P_6，其几何重心是一个整点.

［例 6］ 平面上给定一个凸 1998 边形 Γ，设 S 是一切以 Γ 的顶点为顶点的三角形的集合，一点 P 不在 S 中的任何一个三角形的边上. 求证：S 中包含 P 的三角形总数为偶数.

证明 易知对每个含有 P 点的凸四边形，可得到两个含有 P 点的三角形，以凸 1998 边形的顶点中任何 4 点构成的四边形为凸四边形. 设其中有 m 个四边形含 P 点，则有 $2m$ 个三角形含 P 点，但有重复计数. 下面来排除重复计算的个数.

若 P 含于某个三角形，则必含于该三角形三顶点与其他任一点构成的四边形中，故重复计算了 1998－3＝1995 次，所以含 P 点的三角形总数为 $\frac{2m}{1995}$ 个.

显然，$\frac{2m}{1995}$应为自然数，由于(2, 1995)=1，所以 $1995 \mid m$，即$\frac{2m}{1995}=2k$ 是偶数.

［例 7］ 求证：不存在具有奇数个面，每个面有奇数条边的多面体.(1956 年北京市高中数学竞赛题)

证明 若存在这样的多面体，设其面数为 n，各面的边数分别为 $m_1, m_2, \cdots, m_n$，这里，$n, m_1, \cdots, m_n$ 均为奇数. 因在多面体中，每两个相邻面都有一公共棱，且每一棱由两个面所形成，故 $m_1+m_2+\cdots+m_n$ 是偶数(多面体棱数的两倍)，但因此式是奇数个奇数之和，应是奇数，矛盾！即这样的多面体不存在. 证毕.

［例 8］ 平面直角坐标系中，纵横坐标都是整数的点称为整点. 请设计一种方案将所有的整点染色，每一整点染成白色、红色或黑色中的一种颜色，使得

(1) 每一种颜色的点出现在无穷多条平行于横轴的直线上；

(2) 对于任意白点 A，红点 B 及黑点 C，总可以找到一个红点 D，使 $ABCD$ 为一平行四边形. 证明你设计的方法符合上述要求.(1986 年全国高中数学联赛题)

解 试看这样一个平行四边形，它的顶点是(0,0)，(1,0)，(1,1)，(0,1). 依坐标的奇偶性考虑：(奇，奇)染白色，(偶，偶)染黑色，(奇，偶)和(偶，奇)染红色. 这样，显然满足要求(1)，而且三种颜色不在一直线上(可认为允许三色共线，相应的平行四边形是"退化的"). 事实上，设任意白点 $A(x_1, y_1)$，红点 $B(x, y)$，黑点 $C(x_2, y_2)$(注意坐标奇偶性与其下标一致，而 x, y 则一奇一偶). 若此三点共线，则 $(y-y_1)(x_2-x_1)=(y_2-y_1)(x-x_1)$. 但 (x_2-x_1) 和 (y_2-y_1) 都是奇数，而 $(y-$

y_1)和($x-x_1$)是一奇一偶，所以上面的等式两边也是一奇一偶，等式不能成立.

又设 $D(x', y')$，而 $ABCD$ 为平行四边形，则 AC 的中点为 $\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2), \frac{1}{2}(y_1+y_2)\right)$，$BD$ 的中点为 $\left(\frac{1}{2}(x+x'), \frac{1}{2}(y+y')\right)$，两个中点重合，从而

$$x+x'=x_1+x_2,\ y+y'=y_1+y_2,$$

即
$$x'=x_1+x_2-x,\ y'=y_1+y_2-y.$$

显然 x' 和 y' 都是整数，且因 x_1+x_2 和 y_1+y_2 都是奇数，而 x，y 一奇一偶，所以 x'，y' 也是一奇一偶，从而 $D(x', y')$ 是红点.

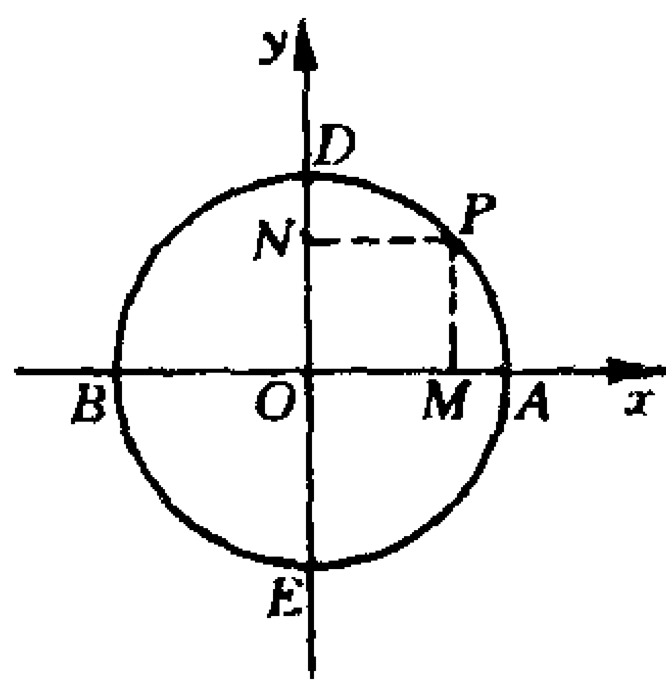


图 1

［例 9］ 如图 1，已知圆 $x^2+y^2=r^2$（r 为奇数），交 x 轴于 $A(r, O)$，$B(-r, O)$，交 y 轴于 $E(O, -r)$，$D(O, r)$. 设 $P(u, v)$ 是圆周上一点，$u=p^m$，$v=q^n$（p，q 都是质数，m，n 都是自然数），且 $u>v$，点 P 在 x 轴和 y 轴上的射影分别是 M, N. 求证：$|AM|$，$|BM|$，$|CN|$，$|DN|$ 分别是 1，9，8，2.（1982 年全国高中数学联赛题）

证明 ∵ $u^2+v^2=r^2$ 且 r 为奇数，∴ u，v，必是一奇一偶.

(i) 设 u 为偶数，v 为奇数. 由 $u=p^m$，$v=q^n$（p，q 为质数），得 $p=2$，q 为奇质数. 由

$$(r+u)(r-u)=r^2-u^2=v^2=q^{2n},$$

知 $r+u=q^\alpha$，$r-u=q^\beta$，其中 $\alpha>\beta$，$\alpha+\beta=2n$，于是

$$2u=q^\alpha-q^\beta=q^\beta(q^{\alpha-\beta}-1).$$

$\because \quad 2u = 2^{m+1}$，$q$ 是奇质数，故 $\beta = 0$，

$\therefore \quad r = u + q^0 = 2^m + 1$，

$q^{2n} = r^2 - u^2 = 2^{m+1} + 1$，

$\therefore \quad (q^n + 1)(q^n - 1) = 2^{m+1}$，

$\therefore \quad q^n + 1 = 2^\delta, q^n - 1 = 2^\varphi$，

其中 $\delta>\varphi, \delta+\varphi=m+1$. 两式相减得 $2=2^\varphi(2^{\delta-\varphi}-1)$，

$$\therefore \quad \varphi = 1,\ \delta = \varphi + 1 = 2.$$

而 $$m = \delta + \varphi - 1 = 2,$$

于是知 $q^{2n}=2^3+1=9=3^2$，$q=3$，$n=1$. 综上讨论，知 $u=2^m=4$，$v=q^n=3$，$r=\sqrt{u^2+v^2}=5$. 这就证得 $|AM|=5-u=1$，$|BM|=5+u=9$，$|CN|=5+v=8$，$|DN|=5-v=2$.

(ii) 若 v 为偶数，u 为奇数，由(i)的讨论可知 $v=4$，$u=3$. 因题设 $u>v$，故舍去.

说明 对于熟悉勾股数公式的读者，本题的讨论可以大为简化. 仍设 u 是偶数，在得到 $p=2$，q 为奇质数后，由 u，v 互质，利用勾股数公式，有

$$u = 2ab,\ v = a^2 - b^2,\ r = a^2 + b^2,$$

$$(a > b,\ a, b \text{ 互质})$$

再由 $2ab=2^m$，得 $b=1, a=\frac{1}{2}u$，由 $v=a^2-b^2$ 得

$$q^n = \left(\frac{1}{2}u\right)^2 - 1 = \left(\frac{1}{2}u + 1\right)\left(\frac{1}{2}u - 1\right).$$

从而 $\frac{1}{2}u-1=1$ $\left(\text{否则}\frac{1}{2}u-1 \text{ 及 } \frac{1}{2}u+1 \text{都是 } q \text{ 的倍数，得 } u \text{ 是 } q \text{的倍数，与 } u, v \text{ 互质相矛盾}\right)$.

$$\therefore \quad u = 4,\ v = 3,\ r = 5.$$

6. 利用奇偶性解其他一些问题

［**例 1**］ 6 只盘子排成一行，每次操作任取两只盘子，将它们移到相邻（或左或右）的位置上，盘子可以重叠，问能否经若干次操作后，使 6 只盘子叠在一起.（匈牙利数学竞赛题）

解 设想盘子的位置是数轴上的整数点 1,2,3,4,5,6. 由于相邻整数的奇偶性不同，故每次移动改变了两个位置的奇偶性.

原来有奇数(3)个盘子在奇数位置，每次移动有三种可能：(i)将两个奇数位置的盘子移到偶数位置；(ii)将两个偶数位置的盘子移到奇数位置；(iii)将一个奇数位置的盘子移到偶数位置，将一个偶数位置的盘子移到奇数位置. 无论哪种情况，每次移动后仍有奇数个盘子在奇数位置上，这就表明不能把 6 只盘子重叠在一起(因为 6 只盘子叠在一起时，奇数位置的盘子是偶数(6 或 0)个).

［**例 2**］ 在以 1,9,8,5,…开头的序列中，从第五项起，每个数字等于它前面四个数字之和的个位数字. 求证在序列中不会出现……,1,9,8,6,….

证明 由 1,9,8,5 开头的序列的奇偶性为

奇，奇，偶，奇，奇，奇，奇，偶，奇，奇，奇，奇，偶，….

下面的规律是“奇，奇，奇，奇，偶”循环出现，而 1,9,8,6 的奇偶性是“奇，奇，偶，偶”，所以它们不会在序列中出现.

［**例 3**］ 在黑板上写出三个整数，然后擦去一个换成其他两数的和减去 1，这样继续下去，最后得到 17,1967,1983. 问原来的三个数能否为

(1) 2，2，2；

(2) 3，3，3.(1983 年第 17 届全苏中学生数学竞赛题)

解 (1) 不能为 2,2,2. 因为 2,2,2 是三个偶数，按规则，第一次换数后，三个偶数就变成两偶一奇. 第二次换数时，若擦去的是偶数，则换上的仍是偶数，这是因为(偶数＋奇数)－1＝偶数，继续保持两偶一奇；若擦去的是奇数，则换上的仍是奇数，这是因为(偶数＋偶数)－1＝奇数，同样保持两偶一奇. 表明在第一次换数后，以后的换数不论怎样进行，三个数的奇偶性永远保持两偶一奇不变，而 19,1969,1987 三个数都是奇数，这种情况是决不会出现的.

所以，原来的三个数不能是 2,2,2.

(2) 能为 3,3,3. 具体做法如下：首先按下法作 8 次变换.

3,3,3→3,3,5→3,5,7→3,7,9→3,9,11→3,11,13→3,13,15→3,15,17→17,15,31. 再注意到 1967＝122×16＋15，1983＝122×16＋31，便知只要由 17,15,31 再按"17,a,a＋16→17,a＋16,a＋32"作 122 次变换，即可得到 17,1967,1983.

[**例 4**] 象棋比赛中，每个选手恰好比赛一局，每局赢者记 2 分，输者记 0 分，平局两个选手每人记 1 分. 今有四个同学统计了比赛中全部得分总数，分别是 1979，1980，1984，1985. 经核实确实有一位同学统计无误. 计算这次比赛共有多少名选手参加.(1983 年北京市初二数学竞赛题)

解 根据题设，不管胜负如何，每局双方得分的和为 2，所以全部选手得分的总数应为偶数，故只有 1980，1984 中的一个正确. 设有 n 个选手参加比赛，则

$$2\cdot\frac{n(n-1)}{2}=1980 \quad 或 \quad 2\cdot\frac{n(n-1)}{2}=1984,$$

解第一个方程得 $n_1=45$，$n_2=-44$(舍去).

第二个方程 $n^2-n-1984=0$ 无整数解.

故有 1980 这个得分总数是正确的，从而可断定这次比赛共有 45 名选手参加.

［例 5］ 设沿江有 A_1，A_2，A_3，A_4，A_5. A_6 六个码头，相邻两码头间的距离相等. 早晨有甲、乙两船从 A_1 出发，各自在这些码头间多次往返运货. 傍晚，甲船停泊在 A_6 码头，乙船停泊在 A_1 码头. 求证：无论如何，两船的航程总不相等（假定船在相邻两码头航行时，中途不改变航向）.

分析 由于相邻两码头间的距离相等，可设为 a，故往返的距离为 a 的偶数倍. 若甲、乙所行距离相等，则必须同奇偶，否则不相等.

证明 六个码头把 A_1 到 A_6 这段水路分成 5 个小段，设每段水路的长为 a，由于船在任意一个码头出发，又返回码头时，往返每小段的水路总是相同的，因此，乙船的航程是 a 的偶数倍. 甲船的航程是从 A_1 到 A_6 再加上各码头之间的往返路程，即 $5a+a$ 的偶数倍 $=a$ 的奇数倍，a 的偶数倍 $\neq a$ 的奇数倍，故甲、乙船的航程总不相等.

［例 6］ (1) 任意重排某一自然数的所有数字，求证：所得数与原数之和不等于 $\underbrace{99\cdots9}_{n个}$（$n$ 为奇数）.

(2) 重排某一数的所有数字，并把所得数与原数相加. 求证：如果这个和等于 10^{10}，那么原数能被 10 整除.（1967 年第 1 届全苏数学竞赛题）

证明 (1) 显然，原数有 n 位，设 a_1，a_2，…，a_n 是原数各数位的数码，a'_1，a'_2，…，a'_n是改变顺序后各数位的数码. 若新得的数与原数的和等于 $\underbrace{99\cdots9}_{n个}$，那么，必有 $a_1+a'_1=9$，$a_2+a'_2=9$，…，$a_n+a'_n=9$.

但原数的各数位的数码之和与改变顺序后的各数位的数码之和相等，即

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=a'_1+a'_2+\cdots+a'_n.$$

故 $$2(a_1+a_2+\cdots+a_n)=9\times n.$$

但此时左边是偶数，而右边是奇数. 矛盾.

故本题获证.

(2) 如果数 a 的末位数字不等于 0，则它与数 b 的末位数字之和等于 10，而其余 9 个数位上的数字和都等于 9，由此得出 $2S(a)=9\cdot 9+10=91$，其中 $S(x)$表示数 x 的各数字之和. 这是不可能的.

［例 7］ 有 7 只正立着的茶杯，要求全部翻成口朝下. 规定每次翻动其中 6 只，试问能否办到？如果茶杯是 8 只，规定每次翻动 7 只，又能否把正立的茶杯全部翻过来？

分析 为解决这个存在性问题，我们在不改变问题实质的前提下，尝试从最简的情形中发现规律.

次数 \ 杯号	1	2	3	4
0	↑	↑	↑	↑
1	[↑]	↓	↓	↓
2	↓	[↓]	↑	↑
3	↑	↑	[↑]	↓
4	↓	↓	↓	[↓]

若有 2 只茶杯．允许每次翻动一只茶杯，那么依次翻动两只茶杯，即可把它们全部翻过来.

若有 3 只茶杯，允许每次翻动 2 只茶杯，无论如何都不能将 3 只茶杯全部翻过来.

若有 4 只茶杯，可以按上表进行翻动（表中 ↑、↓ 表示杯子正立或倒置）．每次翻动 3 只，经 4 次翻动，4 只茶杯全部都翻成口朝下了.

由此归纳并猜想，可以得到当茶杯的个数是奇数时，不能按要求翻转．下面来证明这个结论.

证明　假设这 7 只茶杯都已按要求全部翻过来了，那么每只茶杯必经过奇数次翻动．总的翻动次数是奇数；另一方面，每次翻动 6 只茶杯，茶杯总的翻动次数是 6 的倍数，应为偶数，这是不可能的.

进一步看，由于奇数个奇数相加，其和仍为奇数，故只要茶杯的个数是奇数，都不可能按要求把茶杯翻过来.

当茶杯是 8 只时，则可以按要求把茶杯全部翻过来．事实上，第一次翻动时，只要不翻动第 1 号茶杯；第二次翻动时，只要不翻动第 2 号茶杯；……；第八次翻动时，只要不翻动第 8 号茶杯，这样每个茶杯正好翻动 7 次，最后一定口朝下．显然，上述过程对茶杯数为偶数的情形都适合.

［**例 8**］　将 1×2 的纸片的两个小方格上分别写上 $+1$ 和 -1，今用这样的纸片拼成 $5\times n$ 的方格表（纸片横放或竖放都可以），要求此方格表每行每列各数字的乘积都是 1．问 n 为何值时，这样的方格表可以拼成？

解　如果满足要求的 $5\times n$ 方格表可以拼成，由于每一行各数字的乘积为 1，所以每一行中 -1 的个数必为偶数，从而在方格表中 -1 的总数为偶数，设共 $2m$ 个．由于方格表是由

完整的纸片拼成的，所以表中 1 的个数与 −1 的个数相同，这样表中共 $4m$ 个数，于是 $5n=4m$. 因 5 是质数，故 n 必须是 4 的倍数.

当 n 是 4 的倍数时，只须在水平方向上不断重复图 2 中的构型，就可得到满足要求的拼法.

−1	−1	1	1
1	−1	1	−1
−1	−1	1	1
1	1	−1	−1
1	−1	−1	1

图 2

［**例 9**］ 用 18 张 1×2 的纸牌随意地拼成 6×6 的方格 A（纸牌横放竖放都可以）. 求证：必存在一条直线把 A 分成非空的两块，且此直线不穿过任何一张纸牌.（1963 年第 3 届全俄中学生数学竞赛题）

证明 考察把 A 划分成方格的 5 条水平线和 5 条竖直线，如果它们都至少穿过一张纸牌，由于这些直线中的每一条都是把 A 划分成有偶数个方格的非空的两块，所以它们中的每一条都穿过偶数张纸牌（否则划分的两块各有奇数个方格），再由所设知，每条直线至少要穿过 2 张纸牌. 又因为这些直线中任两条不会穿过同一块纸牌，这样 A 中至少有 $5\times2+5\times2=20$ 张纸牌，导致矛盾. 从而问题得证.

［**例 10**］ 一个由 $n\times n$ 个方格组成的正方形表格，其中填满 $1,2,3,\cdots,n$ 等数，且在任一行、任一列都能遇到所有这些数字. 若表格中的数字关于对角线 AB 是对称的，求证：当 n 是奇数时，在对角线 AB 上的那些方格中将会遇到所有的 $1,2,\cdots,n$ 这些数字.

图 3

解 如图 3，由于在表格的每一行、每一列都出现 $1,2,\cdots,n$ 各数，所以任一行（或列）中，每个数只出现一次，于是表格中有 n 个 1，n 个 2，$\cdots$，n 个 n.

又由于整个表格关于 AB 对称，因此除对角线上的数外，任何一个数都将在其对称位置出现，如图中 a，b，c，d，e，f 等数. 因此除对角线外表格中 $1,2,\cdots,n$ 等数各有偶数个.

当 n 为奇数时，表格中共有奇数个 1，奇数个 2，…，奇数个 n. 所以对角线 AB 上出现 $1,2,\cdots,n$，且 1 到 n 个数都必将出现，但对角线上只有 n 个格子，因此，所有的数在对角线上都恰好出现一次.

［例 11］ 在 4×4 的正方形表中写有 1,9,8,5 四个数，能否在其余的格里填上整数，使得同一行或同一列的四个数中，后面一个数减去相邻的前面一个数的差都相等.（1985 年第 10 届全俄中学生数学竞赛题）

证明 假设存在这样的整数，第一行相邻的数之差为 a，则左上角的数为 $9-a$，右上角的数为 $9+2a$；第四行相邻数之差为 c，则左下角的数为 $8-2c$，右下角的数为 $8+c$；第一列相邻数之差为 b，则左上角的数为 $1-b$，右下角的数为 $1+2b$；第四列相邻数之差为 d，则左上角为 $5-2d$，右下角为 $5+d$. 观察四个角的数可以得到

	9		
1			
			5
		8	

图 4

$$9-a=1-b, \quad ①$$

$$9+2a=5-2d, \quad ②$$

$$1+2b=8-2c, \quad ③$$

$$8+c=5+d. \quad ④$$

可以看出③式左边是奇数，右边是偶数，故③式不成立，即不能按要求填上所有的整数.

［例 12］ 如图 5，给定两张 3×3 方格纸，并且在每一方格内填上“+、−”号. 现在对方格纸中任何一行或一列作全部变号的操作，问可否经过若干次操作，使图 5 中(1)变成(2)？

(第 10 届全俄数学竞赛题)

解 答案是否定的. 假设图 5(1)在一,二,三行经过 m_1, m_2, m_3 次操作,而第一,二,三列经过 n_1, n_2, n_3 次操作变成了图 5(2). 由于图 5 中(1)和(2)左上角符号相反,而从"+"变到"−"要进行奇数次变号,故 m_1+n_1 是奇数. 同理, m_1+n_2 是偶数, m_2+n_1, m_2+n_2 都是奇数. 这样, $(m_1+n_1)+(m_1+n_2)+(m_2+n_1)+(m_2+n_2)$ 是奇数. 但这个和又等于 $2(m_1+m_2+n_1+n_2)$ 是偶数,矛盾. 故不能经过若干次操作使图 5 由(1)变成(2).

+	+	−
+	+	−
−	−	+

(1)

−	−	+
+	−	−
−	−	+

(2)

图 5

又证 考虑图 5(1)中左上角 2×2 小块(全是"+"号). 每次操作是把一行或一列同时变号,所以这个小块中每次都改变偶数个符号(2 个或 0 个),故它永远有偶数个"+"号. 这样,如果图 5 中(1)能变为(2),则相应的左上角的 2×2 小块相同,但图 5(2)中这一块中有奇数个"+"号(1 个),这就表明这样的操作是不可能的.

[例 13] 设 x_1, x_2, …, x_{1998} 都是 +1 或者 −1. 求证: $x_1+2x_2+\cdots+1998x_{1998}\neq 0$.

证明 题目的意思是说,当 $x_1, x_2, \cdots, x_{1998}$ 随意取 +1 或者 −1 时,所得的和 $x_1+2x_2+\cdots+1998x_{1998}$ 都不会是零.

我们有等式

$$\begin{aligned}&x_1+2x_2+\cdots+1998x_{1998}\\&\quad=(x_1+|x_1|)+2(x_2+|x_2|)+\cdots\\&\qquad+1998(x_{1998}+|x_{1998}|)\\&\qquad-(|x_1|+2|x_2|+\cdots+1998|x_{1998}|)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (x_1+|x_1|)+2(x_2+|x_2|)+\cdots \\
&\quad +1998(x_{1998}+|x_{1998}|) \\
&\quad -(1+2+\cdots+1998) \\
&= (x_1+|x_1|)+2(x_2+|x_2|)+\cdots \\
&\quad +1998(x_{1998}+|x_{1998}|)-1999\times 999. \qquad ①
\end{aligned}
$$

这里应用了 $1+2+\cdots+1998=\frac{1}{2}(1+1998)\times 1998$.

注意 $|x_1|+x_1,|x_2|+x_2,\cdots,|x_{1998}|+x_{1998}$总是 0 或者 2，即它们都是偶数，于是$(x_1+|x_1|)+2(x_2+|x_2|)+\cdots+1998(x_{1998}+|x_{1998}|)$是偶数. 由①可知，$x_1+2x_2+\cdots+1998x_{1998}$是偶数与一个奇数(1999×999)的差，故是奇数，当然不会为 0.

[例 14] 求证：对于任意正整数 k，$2k-1$ 和 $2k+1$ 两数中至少有一个不能等于两整数的平方和.（1990 年湖北省黄冈地区初中数学竞赛题）

证明 如果 k 为奇数，设 $k=2m+1$，则 $2k+1=4m+3$；如果 k 为偶数，设 $k=2m$，则 $2k-1=4m-1=4(m-1)+3$.

即 $2k-1,2k+1$ 两奇数中至少有一个被 4 除余 3. 我们来证明形如 $4m+3$ 的整数不可能等于两整数的平方和.

假设 $4m+3=a^2+b^2$(a，b 为整数). 如果 a，b 都为奇数，则 $a^2+b^2=4m_1+1+4m_2+1=4m+2$；如果 a，b 都为偶数，则 $a^2+b^2=4m_1+4m_2=4m$；如果 a，b 为一奇一偶，则 $a^2+b^2=4m_1+1+4m_2=4m+1$. 故知任何两整数平方和被 4 除余数都不为 3. 换言之，被 4 除余 3 的整数不可能等于两整数平方之和. 故 $2k-1$，$2k+1$ 中至少有一个数不能等于两整数平方和.

[例 15] 求证：当 n,k 都是给定的正整数，且 $n>2$，$k>2$ 时，$n(n-1)^{k-1}$可以写成 n 个连续偶数的和.（1978 年全国

中学数学竞赛题）

证明 设 n 个连续偶数为 $2a$，$2a+2$，$2a+4$，…，$2a+2(n-1)$．则

$$S_n=\frac{2a+2a+2(n-1)}{2}\cdot n=[2a+(n-1)]\cdot n.$$

令 $$[2a+(n-1)]n=n(n-1)^{k-1},$$

则 $$2a+(n-1)=(n-1)^{k-1},$$

$$\therefore\quad a=\frac{(n-1)[(n-1)^{k-2}-1]}{2}.$$

由上式可知，不论 n 是奇数，还是偶数，只要 n 为大于 2，k 为大于 2 的整数，那么 a 一定是正整数．所以当

$$a=\frac{(n-1)[(n-1)^{k-2}-1]}{2}$$

时，$n(n-1)^{k-1}$等于 n 个连续偶数之和．

［**例 16**］ 有无数个边长为 1 的正方形，每个正方形各有一条红边，一条蓝边，一条黄边和一条白边．不同的正方形可能有不同的颜色相邻顺序，但每种可能相邻顺序都有无数个正方形．现用这些正方形拼成 $m\times n$ 的矩形(m，$n\in N$)，限定正方形以同色边相靠．试问：对怎样的 m 与 n，可使拼得的矩形也是一条红边、一条蓝边、一条黄边和一条白边？（第 18 届全苏数学竞赛题）

解 若 m 与 n 奇偶性不同，则矩形有且只有两边其长度为奇数，不妨设其中一边是红的，是由奇数个正方形的红边拼成的．那么其他正方形的红边只能出现在矩形内部．由于正方形以同色边相靠，所以红边在矩形内部的这些正方形应有偶数个，连同前面的奇数个正方形共有奇数个．但正方形总数 mn 显然是偶数，矛盾．故 m，n 奇偶性不能不同．

若 m，n 的奇偶性相同，先设同为奇数．如图 6，可作满足

题设的 $1\times n$ 矩形. 若 $m>1$，则再作 $m-1$ 个这样的 $1\times n$ 矩形，其中一半蓝、黄位置交换. 所有这 m 个矩形显然可拼成满足题设的 $m\times n$ 矩形.

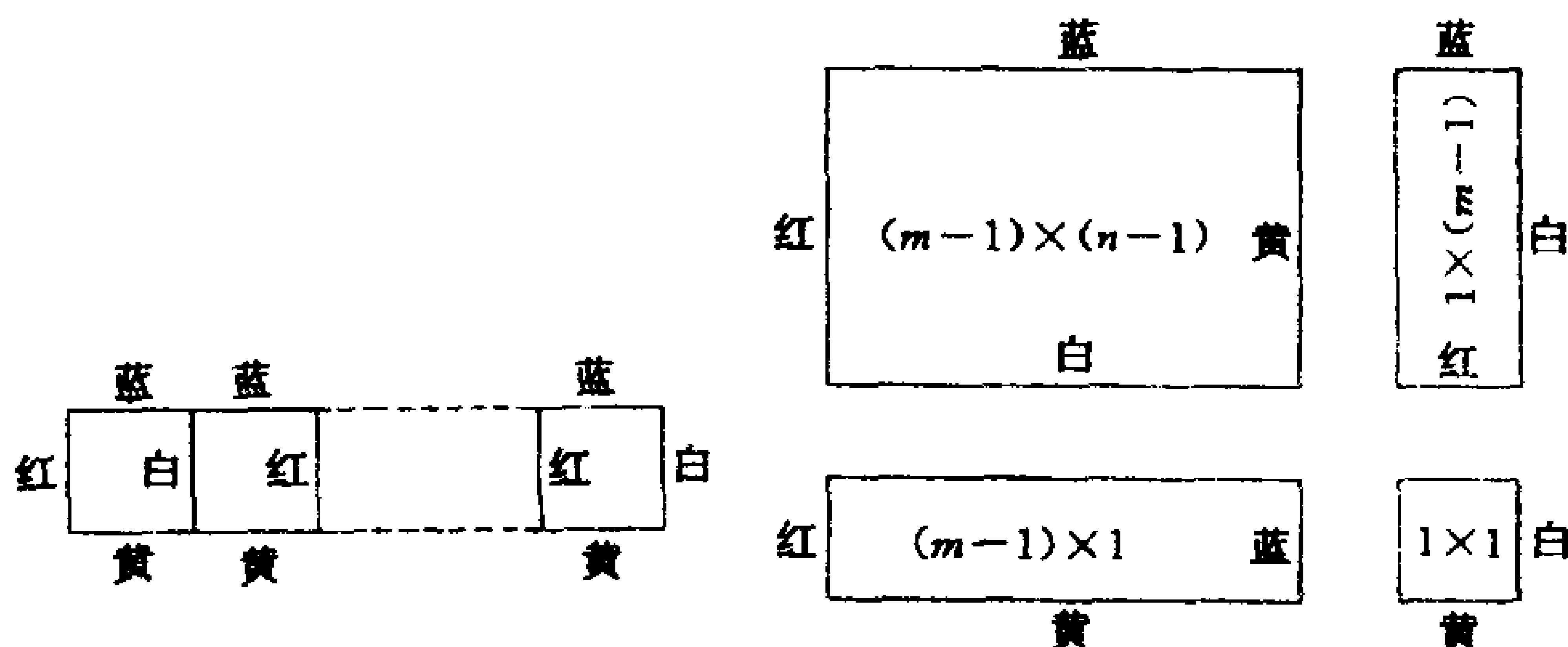
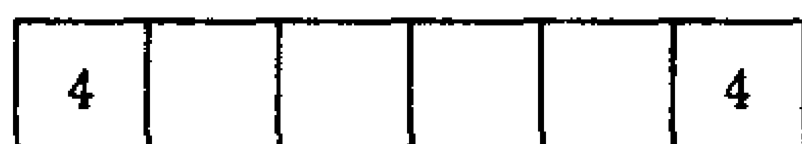


图 6　　　　图 7

再设 m,n 同为偶数，则可按图 7 进行拼接，故也存在满足要求的矩形.

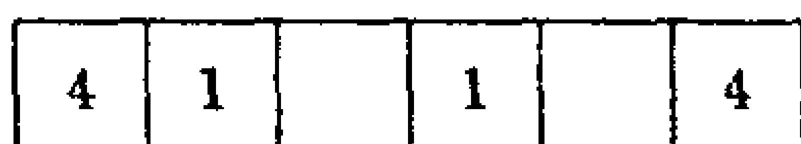
[**例 17**]　能否把 1,1,2,2,3,3,…,1986,1986 这 3972 个数排成一列，使得两个 1 之间有 1 个数，两个 2 之间有 2 个数，两个 3 之间有 3 个数，……，两个 1986 之间有 1986 个数? 请证明你的结论.（1986 年全国中学生数学冬令营试题）

解法 1　为了理解题意，我们来分析一个特殊情况：对于 8 个数 1,1,2,2,3,3,4,4，我们说明以下排法能符合要求. 先排两个 4，中间留下四个空格：



4					4

这四个空格中只能填其余的三个数 1,2,3. 因此，其中至少有一个必须重复出现. 重复出现的数字显然不能为 3，也不能为 2，只能是 1，因此，必须是



4	1		1		4

其余两个空格必须填入 2 与 3，下面的填法正好能符合要求：

4	1	3	1	2	4	3	2

由此可见，对于我们的问题，符合要求的排列能否存在，一定与 1986 这一数的某些性质有关系.

把所有数排好之后，共占了 $2\times1986=3972$ 个位置. 依从左到右的顺序，给这些位置进行编号：第 1 号位直到 3972 号位置.

对于每一个 $i(1\leqslant i\leqslant1986)$，设两个 i 占据了 a_i 号位和 b_i 号位，依题目要求，应有

$$b_i-a_i=i+1,\ 即\ b_i+a_i-2a_i=i+1.$$

从 1 到 1986 求和，得

$$\sum_{i=1}^{1986}(b_i+a_i)-2\sum_{i=1}^{1986}a_i=1986+\sum_{i=1}^{1986}i.$$

由于 $\sum\limits_{i=1}^{1986}(b_i+a_i)$ 是一切位号之和，所以它等于

$$\sum_{i=1}^{3972}i=\sum_{i=1}^{1986}i+\sum_{i=1}^{1986}(1986+i).$$

因此，我们有 $\sum\limits_{i=1}^{1986}(1986+i)=$ 偶数，由此知 $\sum\limits_{i=1}^{1986}i=$ 偶数. 但上式右边 $=\dfrac{1}{2}\times1986\times1987=$ 奇数，这样就得出了矛盾，这说明具有所要求的性质的排列不存在.

解法 2 由上面可知 $a_i+b_i=i+(1+偶数)=i+奇数(i=1,2,\cdots,1986)(a_i<b_i)$. 由此可得：若 i 为奇数，即 i 所占的两个位号 a_i 与 b_i 奇偶性相同；若 i 为偶数，则 i 所占的两个位号 a_i 和 b_i 奇偶性相反. 由此可知，在从 1 到 1986 这 1986 对

数中，偶数共有 993 对，必有 993 个占有奇号位，另外 993 个占有偶号位．因为偶数之所占的两个位置 a_i 与 b_i 必是一奇一偶，奇偶数成对出现；而在 3972 个位号中共有 1986 个奇号位，被偶数占去 993 个，奇数就占有 993 个奇号位．另外，由于奇数 i 所占的一对位号 a_i 与 b_i 的奇偶性必须相同，这样另外 993 个奇数必须仍占有奇号位，但这是不可能的，因为它们已被偶数占去，得出矛盾．所以这种排数方法是不可能的．

解法 3 考察任何两个 a 和两个 b 的相互被夹的关系，它们不外乎是下列三种情形之一：

(i) 如果恰有一个 b 被夹在两个 a 之间，那么也恰有一个 a 被夹在两个 b 之间(此时，两对数相互被夹的数的个数之和为 2)．

(ii) 如果两个 b 都被夹在两个 a 之间，那么就不会有 a 被夹在两个 b 之间(此时，两对数相互被夹的数的个数之和为 2)．

(iii) 如果没有 b 被夹在两个 a 之间，那么或者没有 a 被夹在两个 b 之间(此时，两对数相互被夹的数的个数之和为 0)，或者两个 a 都被夹在两个 b 之间(此时，两对数相互被夹的数的个数之和为 2)．

综合这三种情况，就是说：任何两对不同的数相互被夹的数的个数之和不是 2 就是 0，总是偶数．推而广之，即知在两个 1，两个 2，…，两个 1986 之间，被夹的其他的个数之总和一定是偶数．但根据题意，这个总和是

$$1+2+\cdots+1986=\frac{1987\times1986}{2}=1987\times993,$$

这是个奇数，奇数＝偶数，矛盾！故按题目要求的排法是不存在的．

此例还有其他多种解法，限于篇幅，这里不再作介绍．一般地，考虑 1，1，2，2，…，n，n，这 $2n$ 个数的同样的排法是否可能的问题．

让我们退到最简单的情况来考查一下：

当 $n=1$ 或 2 时，显然是不行的．

但对于 $n=3$ 或 4 时，我们有

2，3，1，2，1，3；

2，3，4，2，1，3，1，4．

正好是满足题设条件的排列．

对于 $n=5$，情况比较复杂，让我们作一点比较细微的分析，假定可以构成这样的排列，那么两个 5 之间应该排进去五个数，因此，1，2，3，4，四个数中至少有一个数再出现两次．

这个数不可能是 4，因为两个 4 之间要填入四个数，这样两个 5 之间至少有六个数．也不可能是 3，因为两个 3 要排就排在五个数的两端，如

$$5\ \ 3\ \ \square\ \ \square\ \ \square\ \ 3\ \ 5.$$

这样，下一步排两个 1 及两个 2 时，无法同时满足条件．同样，也不可能是 2，如

$$5\ \ 2\ \ \square\ \ \square\ \ 2\ \ \square\ \ 5.$$

所以，下一步同时排好两个 1、两个 3 和两个 4 也是不可能的．

关于中间排两个 1 也不可能的讨论比较复杂，为节省篇幅，此处从略．这样，就验证了 1，1，2，2，…，5，5 不可能按要求排成一列．

类似地，可讨论对于 $k=6$ 时，也不可能．

但对于 $n=7$，8 时，又有

5,3,6,7,2,3,5,2,4,6,1,7,1,4;

5,3,7,8,2,3,5,2,6,4,7,1,8,1,4,6.

由以上讨论,可知似乎是以 4 为周期的重复出现,因此,可以作出猜想:

(1) 当 $n=4k+1$ 或 $4k+2$(k 为自然数)时,满足题设要求的排列不存在;

(2) 当 $n=4k+3$ 或 $4k$(k 为自然数)时,可以得到满足题设要求的排列.

对于(1),可以用原题的方法予以证明:

例如,对于 $n=4k+1$,有数列各项的项数之和为 $\frac{1}{2}\{2(4k+1)[1+2(4k+1)]\}$ 是一个奇数.而小于 $4k+1$ 的自然数有 $(2k+1)$ 个奇数,$2k$ 个偶数,因此,数列各项的项数和又应为

$$(2k+1)\text{ 个偶数} + 2k\text{ 个奇数} = \text{偶数},$$

推出矛盾.

对于 $n=4k+2$ 的情形,证明由读者自己完成,这里从略.

为了论证当 $n=4k+3,4k$ 时,构成合乎条件的排列可能性,有必要给出一个构造这种排列的法则.因此,先观察几个具体的排列:

当 $n=11$ 时,

9,7,5,10,2,11,④,2,5,7,9,4,8,6,10,3,1,11,1,3,6,8;

当 $n=12$ 时,

9,7,5,10,2,12,④,2,5,7,9,4,10,8,6,11,3,1,12,1,3,6,8,10;

当 $n=15$ 时,

13,11,9,7,14,4,4,2,15,⑥,2,4,7,9,11,13,6,12,10,

8,14,5,3,1,15,1,3,5,8,10,12;

当 $n=16$ 时,

13,11,9,7,15,4,2,16,⑥,2,4,7,9,11,13,6,14,12,10,8,15,5,3,1,16,1,3,5,8,10,12,14.

注意圆圈中的 4 和 6,它们是给出构造方法的突破口.这两个数是怎样得来的呢?

从 $n=11$ 及 15 来看,有 $4=\frac{1}{2}(11-3)$,$6=\frac{1}{2}(15-3)$.一般地,当 $n=4k+3$ 时,有

$$M=\frac{1}{2}(n-3).\quad (k\geqslant 1) \tag{①}$$

从 $n=12$,16 来看,有 $4=\frac{1}{2}(12-4)$,$6=\frac{1}{2}(16-4)$.一般地,当 $n=4k$ 时,有

$$M=\frac{1}{2}(n-4). \tag{②}$$

当 4 或 6 确定以后,下面的问题就好办了.以 $n=15$ 为例.

首先是排好两个 15,并把 6 排在后一个 15 的右侧;然后在 15 和 6 的两侧按从小到大顺序排上所有小于 6 的偶数对;

其次,在前一个 15 的两侧,从小到大顺序排上所有小于 6 的奇数对;

第三,在上面已排好的两群数的左端分别排上一个 14(小于 15 的最大自然数);

第四,在上面排好的靠左边的一群数的两端按从小到大顺序排上所有大于 6 而小于 15 的奇数对,并在这些奇数对的右端排上第二个 6;

然后,在上述右边一群数的两端按从小到大顺序排上所

有大于 6 而小于 15 的偶数对.

这样,我们就得到了 $n=15$ 的那个数列.

这个法则也完全可以类似地推广到 $n=4k+3$ 和 $n=4k$ 的情形.

例如,对于 $n=4k+3$,按照上述法则,立即可以得到 $M=\frac{1}{2}(4k+3-3)=2k$,

小于 M 的奇数:$1,3,5,\cdots,2k-1$ 共 k 个;

小于 M 的偶数:$2,4,6,\cdots,2k-2$ 共 $k-1$ 个;

小于 $4k+3$ 而大于 M 的奇数:$2k+1,2k+3,\cdots,4k+1$ 共 $k+1$ 个;小于 $4k+2$ 而大于 M 的偶数:$2k+2,2k+4,\cdots,4k$,共 k 个.

因此,构成的数列可写成:

$4k+1,4k-1,\cdots,2k+1,4k+2,2k-2,2k-4,\cdots,4,2,4k+3,2k,2,4,\cdots,2k-2,2k+1,2k+3,\cdots,4k+1,2k,4k,4k-2,\cdots,2k+2,4k+2,2k-1,2k-3,\cdots,3,1,4k+3,1,3,\cdots,2k-1,2k+2,2k+4,\cdots,4k$.

要证实这个构造法则的合理并不难,因为其中按照对称法则写成的各数对,显然是符合条件的,我们只需证明:两个 $2k$,两个 $4k+2$ 和两个 $4k+3$ 之间分别含有 $2k$ 个、$4k+2$ 个和 $4k+3$ 个自然数.

事实上,从上面排出的数列不难看出:

在两个 $2k$ 之间,所含自然数的个数为 $(k-1)+(k+1)=2k$;在两个 $4k+2$ 之间,所含自然数的个数为 $(k-1)+2+(k-1)+(k+1)+1+k=4k+2$;在两个 $4k+3$ 之间,所含自然数的个数为 $1+(k-1)+(k+1)+1+k+1+k=4k+3$. 均满足题设条件.

关于 $n=4k$ 的情形，完全可以照上述方法写成合乎条件的数列. 具体写法和证明，留给读者.

由此，我们证明了前面的猜想是正确的. 而 $n=1986$ 时，被 4 除余数为 2，因此，这种排列是不存在的.

习 题 一

1. 选择题

(1) 若 n 是大于 1 的整数，则 $p=n+(n^2-1)^{\frac{1-(-1)^n}{2}}$ 的值

(A) 一定是偶数.　　(B) 一定是奇数.

(C) 是偶数但不是 2.　　(D) 可以是偶数也可以是奇数.

(1985 年全国初中数学联赛题)

(2) 设二次方程 $x^2+2px+2q=0$ 有实数根，其中 p,q 都是奇数，那么它的根一定是

(A) 奇数.　　(B) 偶数.

(C) 分数.　　(D) 无理数.

(1983 年上海市初中数学竞赛题)

(3) 如果 n 是正整数，那么 $\frac{1}{8}[1-(-1)^n](n^2-1)$ 的值

(A) 一定是零.　　(B) 一定是偶数.

(C) 是整数但不一定是偶数.

(D) 不一定是整数.

(1984 年全国高考题)

(4) 满足等式 $1983=1982x-1981y$ 的一组自然数是

(A) $x=12785$，$y=12768$.

(B) $x=12784$，$y=12770$.

(C) $x=11888$，$y=11893$.

(D) $x=1947$，$y=1945$.

(1983 年福建省初中数学竞赛题)

(5) 若 7 个连续偶数之和为 1988，则此 7 个数中最大的一个是

(A) 286.　　(B) 288.

(C) 290. (D) 292.

(1987 年全国部分省市初中数学通讯赛题)

(6) 已知 n 是偶数，m 是奇数，方程组 $\begin{cases}x-1988y=n,\\11x+27y=m\end{cases}$ 的解 $\begin{cases}x=p,\\y=q\end{cases}$ 是整数，则

(A) p，q 都是偶数. (B) p，q 都是奇数.

(C) p 是偶数，q 是奇数. (D) p 是奇数，q 是偶数.

(1989 年"祖冲之杯"初中数学邀请赛题)

(7) 如果方程 $x^2+(4n+1)x+2n=0$（n 为整数）有两个整数根，那么这两个根是

(A) 都是奇数. (B) 都是偶数.

(C) 一奇一偶. (D) 无法判断.

(1985 年成都市初中数学竞赛题)

(8) 设 a，b 都是整数，给出四个命题：

(i) 若 $a+5b$ 是偶数，则 $a-3b$ 也是偶数；

(ii) 若 $a+b$ 能被 3 整除，则 a，b 都能被 3 整除；

(iii) 若 $a+b$ 是素数，则 $a-b$ 一定不是素数；

(iv) 若 $c=a+b\neq0$，则 $\dfrac{a^3-b^3}{a^3+c^3}=\dfrac{a-b}{a+c}$.

上述命题中是正确命题的个数是

(A) 1 个. (B) 2 个. (C) 3 个. (D) 4 个.

(第二届"祖冲之杯"初中数学邀请赛题)

(9) 六个奇数，它们的和是 42，它们的平方和只可能是

(A) 280. (B) 368. (C) 382. (D) 423.

(1990 年南昌市初中数学竞赛题)

(10) 自然数 1，2，3，…，1989 之和为一个奇数，若将前 t 个数添上"－"号，则这 1989 个数的和

(A) 总是奇数. (B) 总是偶数.

(C) t 为奇数时其和为整数.

(D) 奇偶性不能确定.

(第 6 届缙云杯数学邀请赛题)

(11) 设 $u=x^2+y^2+z^2$，其中 x，y 是相邻的整数，且 $z=xy$，则 $\sqrt{u}$

(A) 总为奇数.　　　(B) 总为偶数.

(C) 有时为偶数，有时为奇数.

(D) 总为无理数.

（第 6 届缙云杯数学邀请赛题）

(12) 设 a 为任一给定的正整数，则关于 x 与 y 的方程 $x^2-y^2=a^2$

(A) 没有正整数解.　　　(B) 只有正整数解.

(C) 仅当 a 为偶数时才有整数解.

(D) 总有整数解.

（1988 年江苏省初中数学竞赛题）

(13) 将正奇数 1,3,5,7,…依次排成五列，如下表所示. 把最左边的一列叫做第 1 列，从左到右依次将每列编号. 这样，数“1985”出现在

	1	3	5	7
15	13	11	9	
	17	19	21	23
31	29	27	25	
	33	35	37	39
47	45	43	41	
	……			

(A) 第 1 列.　　(B) 第 2 列.

(C) 第 3 列.　　(D) 第 4 列.

(E) 第 5 列.

（1985 年第 36 届美国中学生数学竞赛题）

2. 扑克牌中的 A，J，Q，K 分别表示 1，11，12，13. 甲取 13 张红桃，乙取 13 张黑桃，分别洗和后，甲、乙依次各出一张牌，使红、黑牌配成 13 对，求证：这 13 对的差的积必为偶数.（1987 年天津市初二数学竞赛题）

3. 求证：1986 不能等于任何一个整数系数二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的判别式的值.（1985 年苏州市初中数学竞赛题）

4. 设有 n 个实数 x_1，x_2，…，x_n，其中每一个不是 $+1$ 就是 -1，且 $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}}{x_n}+\frac{x_n}{x_1}=0$，求证：$n$ 是 4 的倍数.（1985 年合肥市初中数学竞赛题）

5. 把 n^2 个互不相等的实数排成下表：

$$a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n},$$

$$a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n},$$

$$\cdots\cdots$$

$$a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{nn}.$$

取每行的最大数得 n 个数，其中最小的一个是 x；再取每列的最小值，又得 n 个数，其中最大的一个是 y，试比较 x^n 与 y^n 的大小.（1982 年上海市高中数学竞赛题）

6. 把 1980 分解成连续整数之和.（1980 年长沙市高中数学竞赛题）

7. 求证：当 n 为自然数时，$2(2n+1)$形式的数不能表示为两个整数的平方差.（1990 年西安市初中数学竞赛题）

8. 设 n 是正的偶数，试问下列诸数：

$$1\times(n-1),\ 2\times(n-2),\ \cdots,\ (n-1)\times 1$$

中哪个数最大？为什么？（1989 年浙江省初二数学竞赛题）

9. 有一无穷小数 $A=0.a_1a_2a_3\cdots a_na_{n+1}a_{n+2}\cdots$，其中 $a_k(k=1,2,\cdots)$是 0,1,2,…,9 中的一个数，且 a_1 为奇数，a_2 为偶数，a_3 等于 a_1+a_2 的个位数，a_4 等于 a_2+a_3 的个位数，…，a_{n+2}等于 a_n+a_{n+1}的个位数. 求证：A 是一个循环小数.（1991 年浙江省初中数学竞赛题）

10. 在 99 张卡片上分别写着数字 1,2,3,…,99，现将卡片顺序打乱，让空白面朝上，再在空白面上分别写上 1,2,3,…,99，然后将每一张卡片两个面上的数字相加，再将这 99 个和数相乘，问这个乘积是奇数还是偶数？说明理由.（1991 年浙江省初中数学竞赛题）

11. 桌上放有 1993 枚硬币，第一次翻动 1993 枚，第二次翻动其中的 1992 枚，第三次翻动其中的 1991 枚，……，第 1993 次翻动其中的一枚，按这样的方法翻动硬币，问能否使桌上所有的 1993 枚硬币原先朝下的一面都朝上？说明你的理由.（1992 年浙江省初中数学竞赛题）

12. 求证：不存在两个连续的奇数，每个都可写成两个整数的平方和.

13. 已知一个整数 n，当它减去 48 所得的差是一个整数的平方，当它加上 41 所得的和是另一个整数的平方. 求 n.（1984 年苏州市高中数学竞赛题）

14. 给定自然数 a，b，求证：(1)如果 ab 是偶数，那么一定可以找到两个自然数 c 和 d，使得 $a^2+b^2+c^2=d^2$；(2)如果 ab 是奇数，那么满足 $a^2+b^2+c^2=d^2$ 的自然数 c 和 d 一定不存在.（1980 年北京市初中数学竞赛题）

15. 平面上的任意五个格点，若任何三点都不在同一条直线上，求证：以其中三点为顶点的所有三角形中，至少有一个面积为整数.

16. 设数列$\{a_n\}$：1,9,8,5,…，其中a_{i+4}是a_i+a_{i+3}的个位数字（$i=1, 2, \cdots$），求证：$a_{1985}^2+a_{1986}^2+\cdots+a_{2000}^2$是4的倍数.

17. 存在多少个不同的七位数字，其数字和为偶数.

18. 设a, b是正整数，求证：仅有有限个正整数n存在，使得$\left(a+\frac{1}{2}\right)^n+\left(b+\frac{1}{2}\right)^n$是整数.（1992年澳大利亚数学竞赛题）

19. 设a, b, c是奇自然数，求证：方程$ax^2+bx+c=0$没有形如$\frac{p}{q}$的解，其中p, q是整数.（1991年澳大利亚数学通讯赛题）

20. 求满足$|12^m-5^n|=7$的全部正整数解.（第30届加拿大IMO训练题）

21. 求证：$x^2+y^2=1983$没有整数解.

22. 求证：方程$2x^2-5y^2=7$没有整数解.

23. 是否有整数m, n使得$5m^2-6mn+7n^2=1987$?

24. 求证：$5^x+2=17^y$没有正整数解.

25. 求证：四个正整数之和为13时，它们的立方和不可能是120. 你能否把这个命题推广到一般的情形？请证明你的结论.

26. 一张8×8的方格纸，任意把其中32个方格涂上黑色，剩下的32个方格涂成白色，接着对涂了色的方格纸进行“操作”，每次操作把任意横行或者竖列上每个方格同时变换颜色，问能否最终得到恰有一个黑色方格的方格纸？

27. 用0至9十个不同数字，组成一个能被11整除的最大十位数.

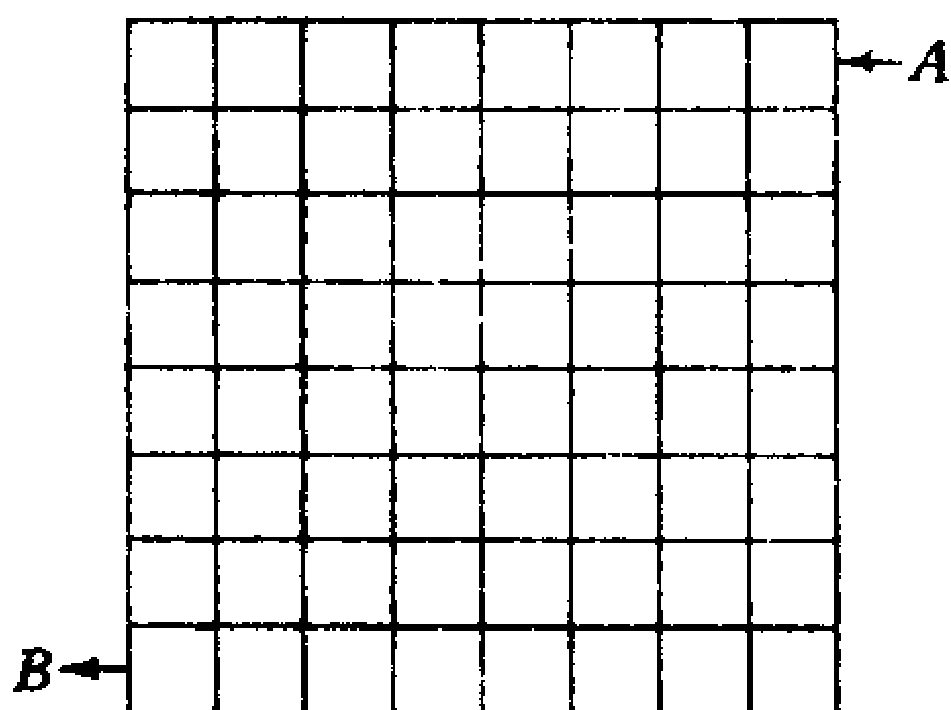
28. 在一个凸n边形内，任意给出有限个点，在这些点之间以及这些点与凸n边形的顶点之间，用线段连结起来，要使这些线段互不相交，而且把原凸n边形分为只有三角形的小块. 求证：这种小三角形的个数与n的奇偶性相同.

29. 在1,2,3,…,1989之间填上“+、−”号，求和式可以得到最小的非负数是多少？（第15届全俄中学生数学竞赛题）

30. 三个质数之积恰好等于它们和的7倍，求这三个质数.

31. 置于暗室的一只抽屉内装有100只红袜子,80只绿袜子,60只蓝袜子,40只黑袜子,一个人从抽屉中选取袜子,但他无法看清所取袜子的颜色.为确保取出的袜子至少有10双(一双袜子是指两只相同颜色的袜子,但每只袜子只能一次用在一双中),问至少需取多少只袜子?(第37届美国中学生数学竞赛题)

32. 如图表示64间陈列室,凡邻室皆有门相通,一人从A进,从B出,但要求每室都到且只到一次,问这种路线是否存在?



33. 求证:不存在三阶幻体.即将数1,2,…,27填入3×3×3的立方体中,不可能使所有"共线"的三数之和均相等.

34. 设a,b是自然数,且有关系式$123456789=(11111+a)(11111-b)$,求证:$a-b$是4的倍数.(1990年日本高考数学题)

35. 求证:方程$x^2+4xy+4y^2+6x+12y=1986$无整数解.

36. 已知多项式x^3+bx^2+cx+d的系数都是整数,并且$bd+cd$是奇数,求证:这个多项式不能分解为两个整系数多项式的乘积.(1963年北京市中学数学竞赛题)

37. 求证:$x^4+1980x^2+2000x+1990$不可能分解成两个整系数二次三项式之积.

38. 设有7个3的不同方幂:3^{x_1}, 3^{x_2}, …, 3^{x_7}($x_i\geqslant0$, $i=1, 2, \cdots, 7$).求证:可以从中找到四个数,它们的积等于某整数的四次方.

39. 求出所有的正整数m, n,使得$(m+n)^m=n^m+1413$.

(1987年第2届东北三省数学邀请赛题)

40. 给定关于x,y的方程组

$$\begin{cases}y-2x-a=0,\\ y^2-xy+x^2-b=0.\end{cases}$$(其中a, b是整数)

求证:如果这个方程组有一组有理数解,那么这组有理数一定是整数.

41. 求证:勾股三角形(即边长为整数的直角三角形)的两条直角边长不可能是两个差为2的质数.

42. 设n为大于2的整数,求证:可以找到一个整数边长的直角三

角形，它的一条边长等于 n.

43. 设 a, b, c 为三个偶数，且 $a>b>c>0$，它们的最小公倍数为 1988. 当 a 在它可取值的范围内取最小的一个时，试确定 a, b, c 可能组成的数组.（1988 年天府杯初中数学竞赛题）

44. 设有 101 个自然数，记为 $a_1, a_2, \cdots, a_{101}$，已知 $a_1+2a_2+3a_3+\cdots+100a_{100}+101a_{101}=S$ 是偶数，求证：$a_1+a_3+\cdots+a_{99}+a_{101}$是偶数.

45. 设 n 为正整数，k 为大于 1 的正整数，求证：n^k 是 n 个连续奇数之和.

46. 设 a,b,c 为正整数，n 为正奇数. 如果 $a+b+c$ 可被 6 整除，求证：$a^n+b^n+c^n$ 可被 6 整除.

47. 求证：任何形如 2^n 的正整数，都不可能表示为两个或两个以上的连续整数之和，而其他形式的正整数都可以表示为这样的和.

48. 设 a, b, c, d 都是奇数，$0<a<b<c<d$，且 $ad=bc$. 如果对整数 k 和 m 有 $a+d=2^k$ 及 $b+c=2^m$，求证：$a=1$.（第 25 届 IMO 试题）

49. 设点 O 在凸 1000 边形 $A_1A_2\cdots A_{1000}$ 内部，用整数 1, 2, …, 1000 把 1000 边形的各边任意编号，用同样的整数把线段 OA_1, OA_2, …, OA_{1000} 任意编号. 问能否找到这样一种编号法，使 $\triangle A_1OA_2$, $\triangle A_2OA_3$, …, $\triangle A_{1000}OA_1$ 各边上的号码和相等？

50. 已知如下数表：

-3	-4	5	24	-5	3
0.2	-3.15	2.7	-2	-7	1.1
-7	π	-1	3.3×10^5	6	-9
-1.2	6.3	720	-631	8	7
63	e	-15	-9.1	-11	8
-30	10	-18	-2	-9	-0.5

将它的任一行或任一列中的所有数同时变号，称为一次变换. 问能否经过若干次变换，使表中的数全变为正数？

51. 设集合 M 由奇数个元素组成，如果对于 M 中的每一个元素 x，都有一个唯一确定的集合 $H_x\subseteq M$ 与 x 对应，并且满足条件：(i)对于任意 $x\in M$，都有 $x\in H_x$；(ii)对于任意两个元素 $x, y\in M$，当且仅当 $y\in H_x$ 时，$x\in H_y$. 求证：至少有一个 H_x 由奇数个元素组成.（1987 年安

徽省数学竞赛题）

52. 在两张 1994×1995 的方格纸上涂上红蓝两种颜色，使得每一行及每一列都有偶数个方格是蓝色的，如果将这两张纸重叠时，有一个蓝格与一个红格重合，求证：至少还有三个方格与不同颜色的方格重合.

53. m 个互不相同的正偶数与 n 个互不相同的正奇数的总和为1987，对于所有这样的 m 与 n，问 $3m+4n$ 的最大值是多少？请证明你的结论.（第 2 届全国中学生数学冬令营试题）

54. 在 4000 与 7000 之间有多少个偶数具有 4 个不同的数字？（1993 年第 11 届美国数学邀请赛试题）

55. 设 $E=\{1,2,3,\cdots,200\}$，$G=\{a_1, a_2,\cdots,a_{100}\}\subset E$. 且 G 具有下列两条性质：

(i) 对任何 $1\leqslant i<j\leqslant 100$，恒有 $a_i+a_j\neq 201$；

(ii) $\sum\limits_{i=1}^{100} a_i = 10080.$

求证：G 中的奇数的个数是 4 的倍数，且 G 中所有数字的平方和为一个定数.（1990 年全国高中数学联赛题）

56. 每个正整数都可以表示成一个或者多个连续正整数之和，试对每个正整数 n，求 n 有多少种不同的方法表示成这样的和.（1992 年中国台北第 1 届数学竞赛题）

57. 设 r 为正整数，定义数列 $\{a_n\}$ 如下：$a_1=1$，且对每个正整数 n，$a_{n+1}=\dfrac{na_n+2(n+1)^{2r}}{n+2}$. 求证：每个 a_n 都是正整数，且确定对哪些 n，a_n 是偶数.（1992 年中国台北第 1 届数学竞赛题）

三、奇数和偶数的特殊表示法

奇偶性有多种特殊的表述法，如染色法，01 法，+1，−1 等表述法．下面分别作一些介绍．

1．涂 色 法

最简单的涂色问题是从一种民间游戏中发展起来的方格盘上的涂色问题．经过数学工作者的探索和研究，解决这类问题的方法已经发展成为解数学题的一种重要方法．特别是在数学竞赛中，许多问题借助于涂色（即对所研究的对象进行分类，一种颜色代表一类），就能得到简捷的解答．当然，在具体的应用时，还应结合其他方法使用．

（1）对点涂色

［**例 1**］ 求证：马从中国象棋盘上任一点出发，要跳回原处，必须经过偶数步．（1983 年中国科学院研究生入学试题）

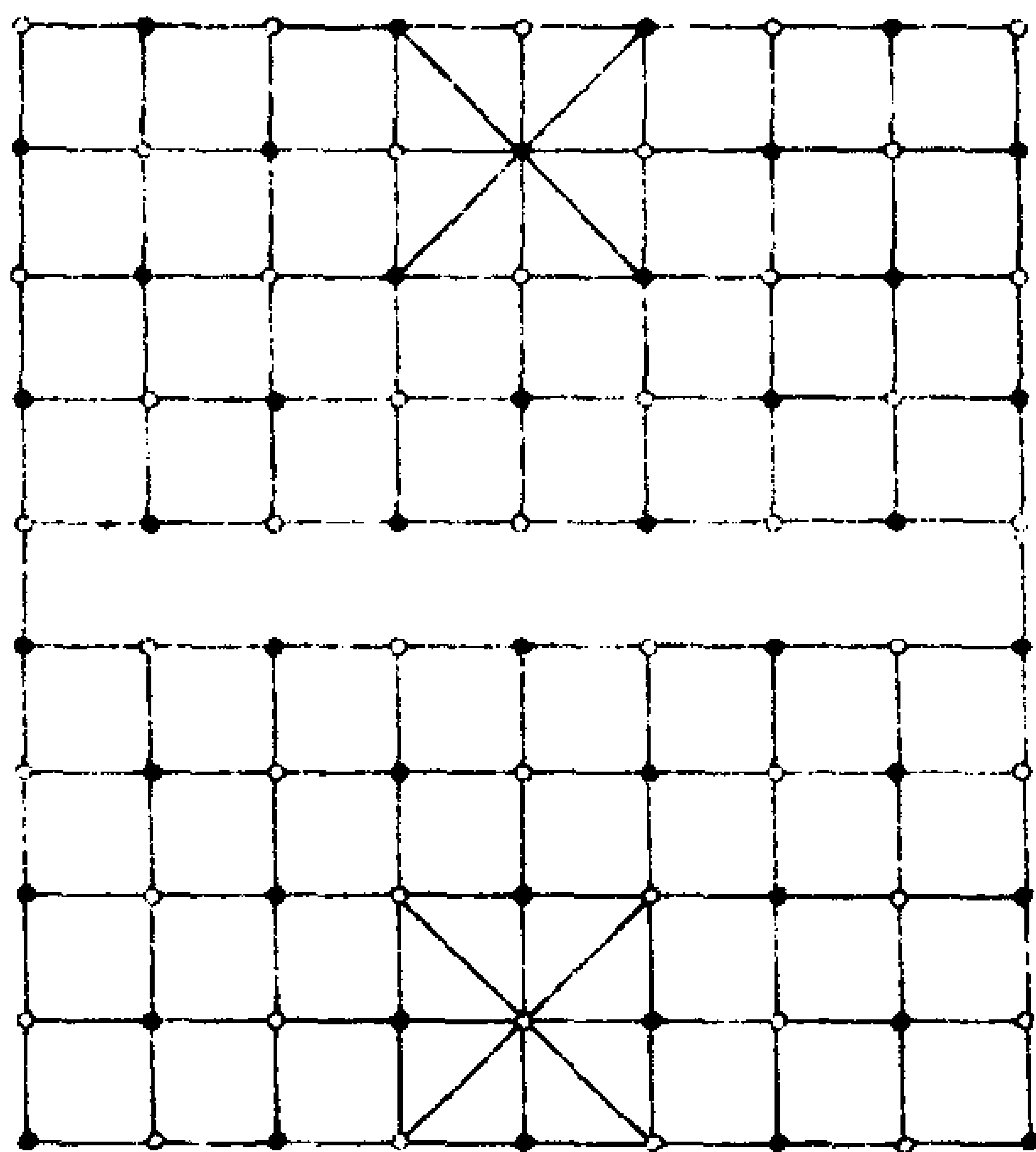


图 8

证明 如图 8，把棋盘上各点按黑色、白色间隔涂色．不

妨设马从黑点出发，则一步只能跳到白点，下一步再从白点跳到黑点，因此，从开始位置起相继经过的点的颜色是白、黑、白、……要想回到黑点，必须黑白成对，即经过偶数步回到原来的位置.

[**例 2**] 如图 9，能否沿此图上的线画出一条线，它经过每一个节点恰好一次？

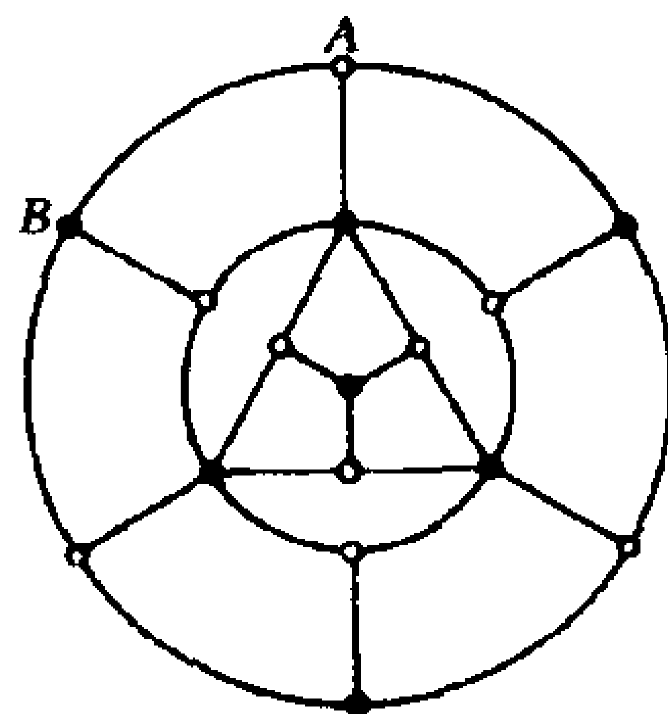


图 9

解 注意到图 9 中恰好有 16 个节点，且具有对称性，故可将这 16 个节点一一相间地涂上黑白两种颜色，易知这是能做到的.

根据节点的颜色分布规律，可以看出每条线段或圆弧的两个端点总是异色的. 于是对于到达了一个白点（或黑点）后所画的线紧接着必须到达一个黑色（或白色）节点. 由于图中有 7 个黑节点，9 个白节点，假设可以画一条满足题设要求的线，不外乎两种情形：

(i) 从一白色节点出发；

(ii) 从一黑色节点出发.

若从一白点 A 出发，则颜色变化如下：

$$白\to\overset{①}{黑}\to白\to\overset{②}{黑}\to\cdots\to\overset{⑦}{黑}(\to白).$$

此时有 7 个黑点都通过一次，而有 2 个白色节点尚未通过，而最多只能再通过一个白节点，另一个不可能通过.

若从一黑色点 B 出发，亦可推出此线不可能经过所有节点，使它经过每个节点刚好一次. 故不可能达到题设要求.

[**例 3**] 设 $\triangle ABC$ 为正三角形，E 为三条线段 BC，CA，AB 上的点（包括 A，B，C 在内）所组成的点集. 将 E 分成两个

子集，是否总有一个子集中含有一个直角三角形的顶点？证明你的结论.（1983 年第 24 届 IMO 试题）

证明 问题可化为如下形式：将 E 中的点红、蓝二染色，求证：一定存在一个直角三角形，三顶点的颜色相同.

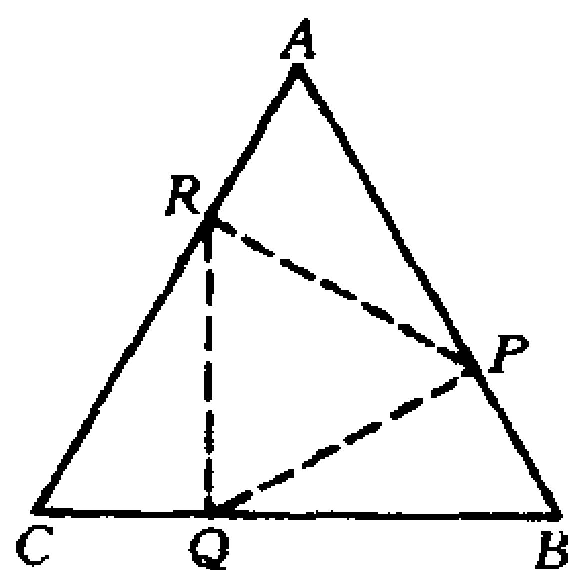


图 10

如图 10，在边 AB，BC，CA 上分别取点 P，Q，R，使 $AP:PB=BQ:QC=CR:RA=2$，则有 $PQ\perp AB$，$QR\perp BC$，$RP\perp CA$. 对点集 E 进行红、蓝二染色，则 P，Q，R 中至少有两点同色，不妨设 R，Q 为红色.

(1) 如果 BC 边上，除 Q 点外还有红色点 X，则 RQX 组成红色顶点的直角三角形.

设 BC 边上除 Q 点外没有红点，则有

(2) 如果 AB 边上除 B 点外还有蓝点 Y，则作 $YM\perp BC$，M 为垂足，显然 M 不同于 Q，$\triangle YBM$ 为蓝色顶点的直角三角形，现设 AB 边上除 B 点外都染以红点，这时作 $RZ\perp AB$，Z 为垂足，则 RAZ 为红色顶点的三角形.

［**例 4**］ 平面上有三个方向的直线，互相交成 60°的角，构成边长为 1 的正三角形网络. 我们把其上的交点叫广义“格点”. 求证：如果凸 n 边形的顶点在这网络的“格点”上，多边形内部和边上都没有其他“格点”，那么 $n\leqslant 4$.

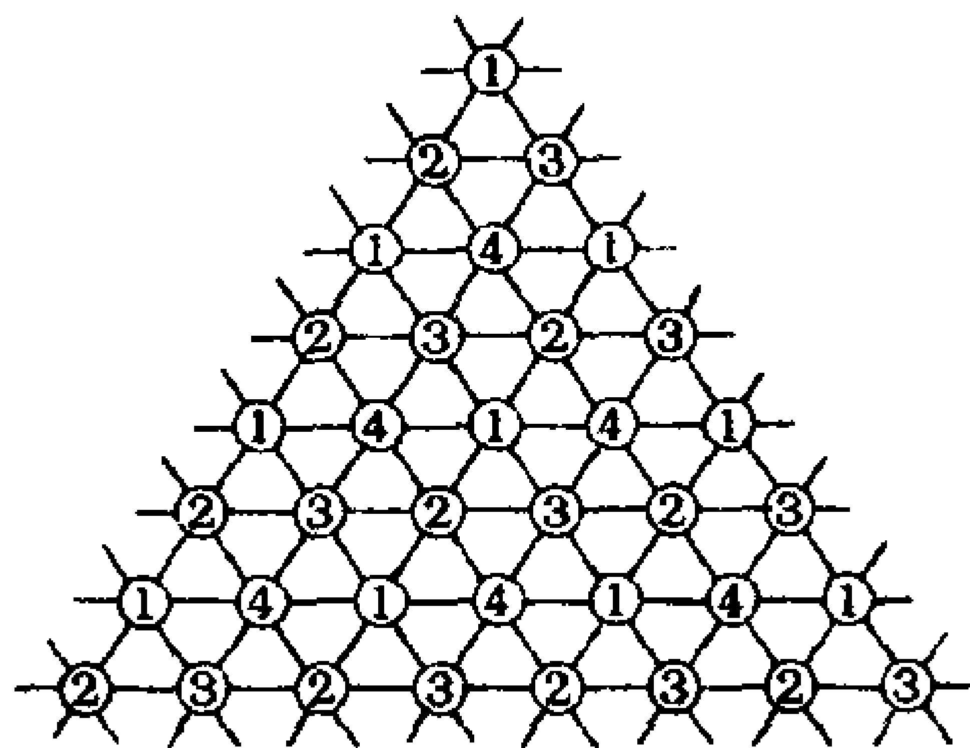


图 11

证明 把正三角形网络上的“格点”，按如图 11 所示的方式，分别涂上四种颜色中的一种.

我们来证明：$n\geqslant5$ 时，多边形的内部或边上必有其他的“格点”.

事实上，如果 $n\geqslant5$，那么，“格点”n 边形必有两个同色“格点”作为这多边形的顶点. 而按我们的涂色，当以两个同色“格点”为端点时，这线段的中点必是网络的“格点”. 又因为这 n 边形是凸的，以它的顶点为端点的线段中点，或者在多边形内部，或者在多边形的边上.

这表明，$n\geqslant5$ 时的以“格点”为顶点的凸多边形均与题设条件不符合，$\therefore n\leqslant4$.

[**例 5**] 有 20 张卡片，将数字 0 至 9 每一个都写在两张卡片上面. 试问：能否将这些卡片排成一排，使得两个 0 相邻，两个 1 之间恰好有 1 张卡片，两个 2 之间恰好有 2 张卡片，等等，直到两个 9 之间恰有 9 张卡片?（第 28 届莫斯科数学竞赛题）

解 将 10×2 个位置按奇数位染白色，偶数位染黑色，于是黑、白点各有 10 个. 因相同两个偶数之间有偶数个点，相同两个奇数之间有奇数个点，故相同的两个偶数占据一个黑点和一个白点. 而相同的两个奇数要么占据两个白点，要么占据两个黑点. 于是 10 个偶数 0，0，2，2，4，4，6，6，8，8 共占据 5 个黑点和 5 个白点，而 10 个奇数 1，1，3，3，5，5，7，7，9，9 中占据黑点位置的必为偶数个，设为 $2a$，于是 $2a+5=10$，得到 $5=2a$ 为偶数. 这是不可能的. 因此符合题目条件的排法是不存在的.

[**例 6**] 将正十三边形的每个顶点染成黑色或染成白色，每顶点染一色. 求证存在三个同色顶点，它们刚好成为一个等腰三角形的顶点.（第 35 届莫斯科数学竞赛题）

证明 设 13 个顶点依次为 $A_1,A_2,\cdots,A_{12},A_{13}$. 若 13 个

顶点都染成黑色或都染成白色，则结论显然成立. 故只需考虑 13 个顶点中有染黑色也有染白色的情形. 这时必有相邻两顶点同色，不妨设 A_1，A_2 同色，现考虑 A_{13}，A_1，A_2，A_3，A_8 这五个顶点，由抽屉原理知其中必有三顶点同色，这又分为下列三种情形：

(1) A_{13}，A_1，A_2，A_3 中有三点同色，又 A_1，A_2 同色，故 A_{13}，A_1，A_2，A_3 同色. 这时$\triangle A_1A_2A_3$ 为三顶点同色的等腰三角形.

(2) A_{13}，A_3，A_8 同色，这时$\triangle A_{13}A_3A_8$ 为三顶点同色的等腰三角形.

(3) A_1，A_2，A_8 同色，这时$\triangle A_1A_2A_8$ 为三顶点同色的等腰三角形. 证毕.

[例 7] 假设对平面上每一点，任意染上红、蓝、黄三种颜色中的一种，则一定存在一条端点同色而长为 1 的线段.

证明 首先作一个边长为 1 的等边$\triangle ABC$，若$\triangle ABC$ 三顶点中任何两点不同色，不妨设 A，B，C 分别染成红、蓝、黄色. 这时再以 BC 为边在 A 的异侧作等边$\triangle BCD$，若 D 为蓝色或黄色，则结论已成立，否则 D 与 A 同为红色，将菱形 $ABCD$ 绕 A 旋转到 $AEFG$，使 $DG=1$(图 12). 若$\triangle AEF$ 或$\triangle EFG$ 中有两点同色，则结论已成立，否则，E，F 中只能一点为蓝色另一点为黄色，从而 G 与 A 同为红色，于是得到 DG 是长度为 1 且两端点同为红色的线段. 至此，例 7 得证.

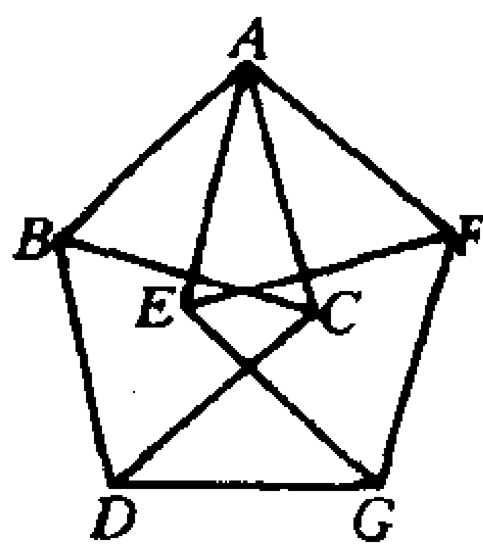


图 12

[例 8] 用任意的方式，给平面上的每一个点染上黑色或白色，求证：一定存在一个边长为 1 或 $\sqrt{3}$ 的正三角形，它的三个顶点是同色的. (1986 年首届全国中学生数学冬令营

试题)

证明 分为两步:

(1) 先用反证法证明:如果给平面上的每一个点都染上黑色或白色,则必定存在距离为 2 且不同色的两点.

假设平面上任何距离为 2 的两点都是同色的. 因为平面上的各点不全同色,则必有两点 M,N 是不同色的. 不失一般性,不妨设点 M 是黑色的,点 N 是白色的. 根据阿基米得公理,在射线 MN 上必定存在 n 个点 $M_1,M_2,\cdots,M_n$,使 $MM_1=M_1M_2=\cdots=M_{n-1}M_n=2$,且点 N 落在线段 $M_{n-1}M_n$ 内. 由假设,点 $M_1,M_2,\cdots,M_n$ 都与点 M 同色,即都是黑色的. 现分别以点 N,M_n 为圆心,2 为半径作弧相交于点 P(图 13),则无论点 P 是黑色的还是白色的,都必定与点 M_n 或点 N 同色. 这个矛盾说明存在着不同色的距离为 2 的两点.

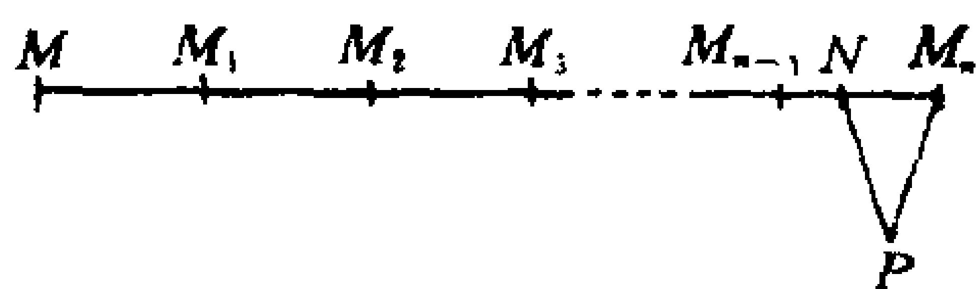


图 13

(2) 现设 A,B 两点的距离为 2 且不同色,比如,点 A 为黑色,点 B 为白色. 不失一般性,不妨设线段 AB 的中点 C 是黑色的. 分别以点 A,C 为圆心,1 为半径作弧,相交于点 D 与 E(图 14). 如果点 D 或 E 中有一点是黑色的,就已经有了一个边长为 1 的正三角形,它的三个顶点同色. 如果点 D 与 E 都是白色的,则边长为 $\sqrt{3}$ 的正 $\triangle BDE$ 的三个顶点同色.

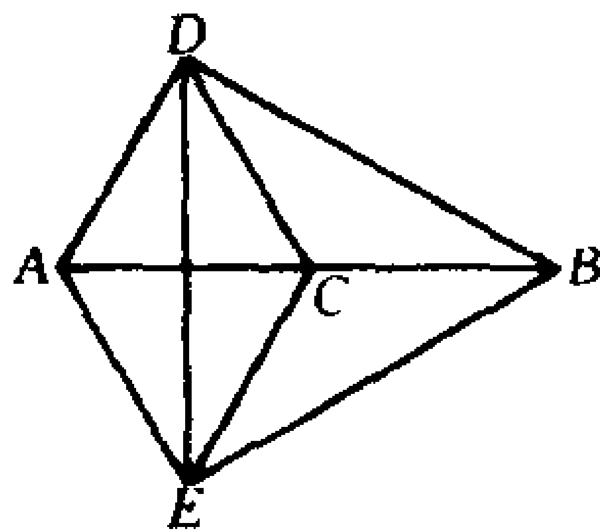


图 14

运用此例,很容易解决下列问题:

用任意的方式,给平面上的每一个点染上黑色或白色,求证:一定存在一个边长为 $\sqrt{2}$,$\sqrt{6}$,π 的三角形,它的三个顶

点是同色的.

证明 如果以$\sqrt{2}$做度量单位，则只需讨论边长为1，$\sqrt{3}$，$\frac{\pi}{\sqrt{2}}$的三角形. 由例8知，总存在着边长为1或$\sqrt{3}$的三个顶点同色的正三角形；而无论这两种情况中的任何一种发生，都因为有$\frac{\pi}{\sqrt{2}}-\sqrt{3}<1<\frac{\pi}{\sqrt{2}}+\sqrt{3}$或者$\frac{\pi}{\sqrt{2}}-1<\sqrt{3}<\frac{\pi}{\sqrt{2}}+1$，则必存在着边长1，$\sqrt{3}$，$\frac{\pi}{\sqrt{2}}$的三个顶点同色的三角形.

(2) 对线段涂色

[**例9**] (1) 求证：任意六个人中，总有三个人相互认识，或者相互不认识.(1947年匈牙利数学竞赛题)

(2) 空间中的六点，任三点不共线，任四点不共面，成对地连接他们得十五条线段，用红色或蓝色染这些线段(一条线段只染一种颜色). 求证：无论如何染色，总存在同色的三角形.(1953年美国普特南数学竞赛题)

注：(1)的变形是多种多样的，如可将其中人的"相互认识或相互不认识"关系改为国家之间"相互有外交关系或相互没有外交关系"，或是几何体之间"两两相交或两两不相交"关系，或是直线之间"两两共面或两两异面"关系. 下面是一个加强了条件并且经过变形的波兰数学竞赛题：

(3) 平面上有六点，任何三点都是一个不等边三角形的顶点，求证：这些三角形中的一个三角形的最短边同时是另一个三角形的最大边.(波兰数学竞赛题)

当然(3)中的"平面"也可以用"空间"来代替，下面仅给出这一问题的证明.

证明 设$P_1, P_2, \cdots, P_6$是空间中六个已知点. 在每个三

角形 $P_iP_jP_k$ 中，把最短边涂成红色，于是，每个三角形中必有一条边为红色，其余的边未涂色. 从每个点 P_i 可作 5 条线段与其余已知点相连. 按抽屉原则，这五条线段中，或者至少有三条线段已被涂色，或者至少有三条线段还未涂色.

(i) 如果经过点 P_1 的 5 条线段中至少有三条（例如，设为线段 P_1P_2，P_1P_3，P_1P_4）涂红，那么，在由这三条线段的另一顶点为顶点的$\triangle P_2P_3P_4$ 中至少须有一边（最短边）涂红，设是边 P_2P_3，那么$\triangle P_1P_2P_3$ 的三边就都被涂红了.

(ii) 如果经过点 P_1 的线段中至少有三条未被涂红（例如设为线段 P_1P_4，P_1P_5，P_1P_6），由于$\triangle P_1P_4P_5$，$\triangle P_1P_5P_6$，$\triangle P_1P_6P_4$ 中每个都至少有一边是红的，这边显然不会是经过 P_1 点的. 因此，线段 P_4P_5，P_5P_6，P_6P_4 全是红的，即$\triangle P_4P_5P_6$ 的各边就都是红色的了.

［**例 10**］ 17 个科学家中的每一个和所有其他人都通信. 在他们的通信中仅仅讨论三个题目，而任两个科学家仅仅讨论一个题目. 求证：其中至少有三个科学家，他们的互相通信中讨论的是同一个题目.（1964 年第 6 届 IMO 试题）

证明 将科学家用点 $A_0, A_1, \cdots, A_{16}$表示. 每两点之间连一条棱，如果讨论的是第一个题目，相应的棱涂红色，讨论的是第二个题目，则涂黄色，第三个题目涂蓝色.

自 A_0 引出的 16 条棱，根据抽屉原则，其中至少有六条是同一颜色. 设 A_0A_1，A_0A_2，A_0A_3，A_0A_4，A_0A_5，A_0A_6 为红色，考虑以 $A_1, A_2, \cdots, A_6$ 为顶点的所有棱，如果有一条是红色的，比如 A_1A_2 是红色的，则 A_0，A_1，A_2 三人讨论的是同一个题目，如果 $A_iA_j(1\leqslant i<j\leqslant 6)$中没有一条边是红色的，问题就变为："如果六个点间的所有棱用黄、蓝两种颜色去染，则一定有一个同色三角形"，亦即三人讨论的同一个题目.

在 $A_1A_2,A_1A_3,A_1A_4,A_1A_5,A_1A_6$ 这 5 条棱中，由于只有两种颜色，则至少有三条棱的颜色相同，设 A_1A_2,A_1A_3,A_1A_4 染有黄色，若在 A_2A_3,A_2A_4,A_3A_4 三条棱中如有一条是黄色，则完成证明，若都为蓝色，则$\triangle A_2A_3A_4$ 为蓝色三角形，亦证明了命题的结论.

[**例 11**] (1) 大厅中会聚 100 个客人，他们中每人至少认识 67 人. 求证：在这些客人中，一定可以找到 4 个人，他们之中任何两人都彼此认识.(1966 年波兰数学竞赛题)

(2) 九位数学家在一次国际会议上相遇，他们之中的任意三个人中，至少有二人会说同一种语言. 如果每一位数学家最多只能说三种语言，求证：至少有三位数学家能用同一种语言交谈.(1978 年第 7 届美国数学竞赛题)

上面二例的证法仿照例 10 即可得出.

[**例 12**] 一个国际社团的成员来自六个国家，共有成员 1978 人，用 1,2,…,1977,1978 编号，求证：该社团至少有一个成员的顺序号数，等于他的两个同胞的顺序号数之和，或等于一个同胞的顺序号数的二倍.(1978 年第 20 届 IMO 试题)

证明 此题等价于"把 1,2,…,1977,1978 这 1978 个数分成六个集合，则一定存在一个集合 M,M 中至少有一个数，它等于 M 中某两个数之和，或等于 M 中某一个数的两倍."

下面我们来证明这个命题.

将 1,2,…,1978 任意分成六个集合 $M_i(i=1,2,\cdots,6)$，并设这 1978 个数对应平面上 1978 个点 $P_i(i=1,2,\cdots,1978)$，且其中任三点不共线. 用六种颜色去涂任两点的连线 P_iP_j，当且仅当$|i-j|\in M_k$ 时，线段 P_iP_j 涂第 k 种颜色. 由拉姆赛定理，一定存在一个同色$\triangle P_aP_bP_c$. 不妨设$\triangle P_aP_bP_c$ 三边涂的是第一种颜色，且 $a<b<c$，则 $b-a\in M_1,c-b\in M_1,c-a\in M_1$，但 $c-a$

$=(b-a)+(c-b)$，这正是我们所要证明的.

［**例 13**］ 设 n 为一正数，且 $A_1,A_2,\cdots,A_{2n+1}$ 是集合 B 的子集，设(i)每一个 A_i 恰含有 $2n$ 个元素；(ii)每一 $A_i\cap A_j(1\leqslant i<j\leqslant 2n+1)$恰含有一元素；(iii)$B$ 中每个元素属于至少两个子集 A_i. 问：对怎样的 n，可以对 B 中的每一元素贴一张写有 0 或 1 的标签，使得每个 A_i 中恰含有 n 个贴上了写有 0 的标签的元素？（1988 年第 29 届 IMO 试题）

解 由已知(i)，(ii)，(iii)可得 B 中每一元素恰好属于某两个子集 A_i. 假设有一个元素属于三个子集(不妨设 $a\in A_1\cap A_2\cap A_3$)，由(ii)知 A_1 和 $A_2,A_3,\cdots,A_{2n+1}$ 的公共元素至多有 $2n-1$ 个，又由(i)知 A_1 中有一个元素仅属于 A_1，这与(iii)矛盾.

下面我们用 $2n+1$ 个点 $P_i(i=1,2,\cdots,2n+1)$表示 $2n+1$ 个子集 A_i，P_i 与 $P_j(i,j=1,2,\cdots,2n+1,i\neq j)$间的连线表示 A_i 与 A_j 的公共元素，则问题变为求 $n(n\in N)$，将 $2n+1$ 个点 P_i 间的连线涂上黑色或白色，使得从每一顶点恰好引出 n 条边，显然此时共有 $\frac{1}{2}n(2n+1)$条白边，从而 n 为偶数. 不难证明 n 为偶数时这样的涂色存在.

［**例 14**］ 设 $A_1,A_2,A_3,\cdots,A_6$ 是平面上的六点，其中任三点不共线. 如果这些点之间任意连结了 13 条线段，求证：必存在 4 点，它们每两点之间都有线段连结.（1989 年全国初中数学联赛题）

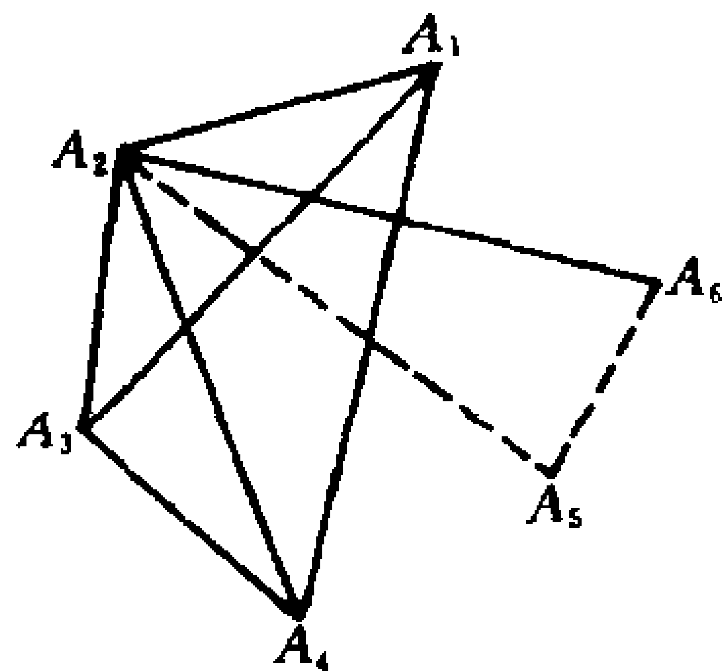


图 15

证明 将已连结的 13 条线段全染成红色，还未连上的两条用蓝线连上(因为所有两点连一线段时应该共有 15 条). 由例 9 知必有一个同色三角形，现在的蓝色线只有两条，所

以同色三角形必为红色的.不妨设$\triangle A_1A_2A_3$是红色的.

从A_4引向$\triangle A_1A_2A_3$顶点三条线段,从A_5引向$\triangle A_1A_2A_3$顶点也有三条,从A_6引向$\triangle A_1A_2A_3$顶点也有三条,这九条线段中最多只有两条蓝色,起码有七条是红色的,因此,或者是A_4,或者是A_5,或者是A_6,引向$\triangle A_1A_2A_3$顶点的线段全是红色.比如说,A_4A_1,A_4A_2,A_4A_3全是红色,那么四点A_1,A_2,A_3,A_4的每两点连线全是红色的,换句话说,这四点中每两点连线都是题目中给出的13条连线之一.命题得证.

(3) 对小方格涂色

[**例 15**] 如图16,是由14个大小相同的正方形组成的图形.求证:不论如何用剪刀沿着图中的直线进行裁剪,总剪不出七个由相邻的两个小正方形所组成的矩形来.

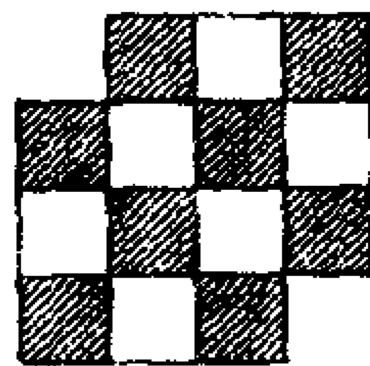


图 16

解 如图进行涂色,若能剪出七个由相邻二正方形组成的矩形,那么每个矩形必定由一个涂色的小正方形和一个不涂色的小正方形所组成,因此,图中应该有七个涂色的小正方形和七个不涂色的小正方形,但图中有八个涂色的小正方形,六个不涂色的小正方形,与要求产生矛盾,因此,无论怎样剪,都不可能剪出符合要求的七个矩形.

[**例 16**] 求证:只用2×2及3×3的两种瓷砖不能恰好铺盖23×23的正方形地面.(1993年黄冈地区初中数学竞赛题)

证明 将23×23的正方形地面中第1,4,7,10,13,16,19,22列中的小方格全染成黑色,剩下的小方格全染成白色,于是白色的小方格的个数为15×23,这是一奇数.因为每块2×2瓷砖总是盖住二黑格和二白格或者盖住四白格,每块3×3瓷砖总是盖住三黑格和六白格,故无论多少2×2

及 3×3 的瓷砖盖住的白格数总是一个偶数，不可能盖住 23×15 个白格，所以，只用 2×2 及 3×3 的瓷砖不能盖住 23×23 的地面.

[**例 17**] 如图是由 4 个 1×1 的小正方形组成的“L”形，用若干张这种“L”形的硬纸片无重叠地拼成一个 $m\times n$（长为 m 个单位，宽为 n 个单位）的矩形. 求证 mn 必定是 8 的倍数.（1986 年北京市初二数学竞赛题）

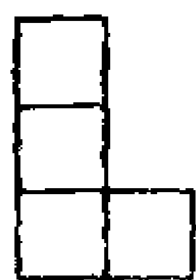


图 17

分析 $m\times n$ 的矩形是由若干张“L”形纸片无重叠地拼成，它共有 mn 个单位正方形. 因为每个“L”形含有 4 个单位正方形，所以 mn 是 4 的倍数，这样一来，只需证明 $m\times n$ 矩形中含有偶数个“L”形纸片即可.

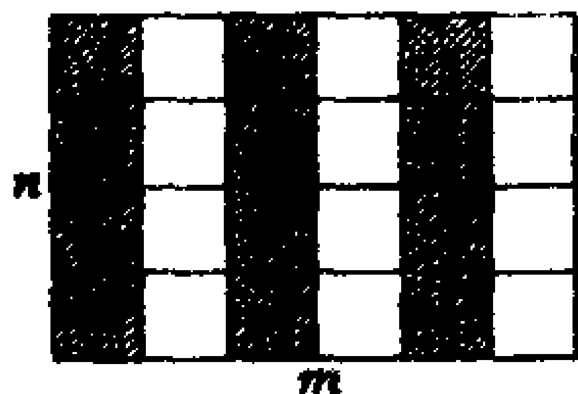


图 18

证明 $\because m\times n$ 是 4 的倍数，m,n 中必有一个是偶数，不妨设 m 为偶数，把 $m\times n$ 矩形中的 m 列，按黑白相间涂色（图 18），则不论“L”形在这个矩形中放置的位置如何（“L”形放置的位置共有 8 种，如图 19），“L”形或占有 3 个白格单位正方形和一个黑格单位正方形，或占有 3 个黑格单位正方形和 1 个白格单位正方形. 设第一种“L”形共 p 个，第二种“L”形共有 q 个，则 $m\times n$ 矩形中共有白格单位正方形数为 $3p+q$，而它的黑格正方形数为 $3q+p$. 因为 $m\times n$ 为偶数，所以 $m\times n$ 矩形中黑、白条数相同，黑白单位正方形的总数相等，故 $3p+q=3q+p$，从而有 $p=q$，$\therefore$“L”形有 2p 个，即“L”的总数为偶数，$\therefore m,n$ 一定是 8 的

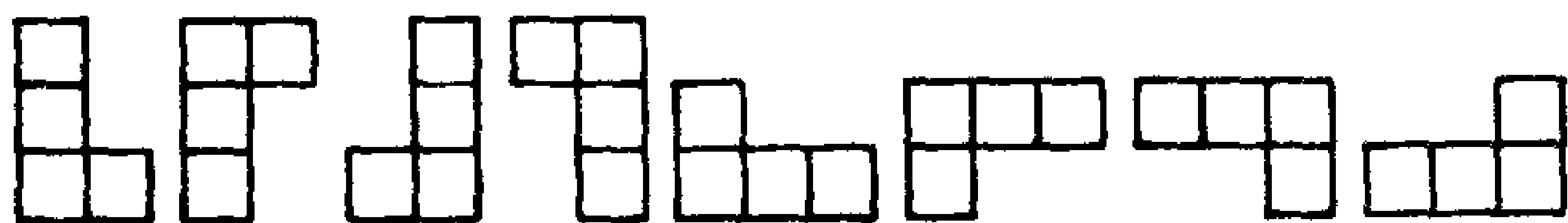


图 19

倍数.

[**例 18**] 某展览馆有 24 个陈列室，排成如图 20 所示的一个有缺口的正方形，每个方格代表一室，缺口处有三扇门进出，邻室有门相通.

(1) 求证：不存在这样的参观路线，使每室到且仅到一次；

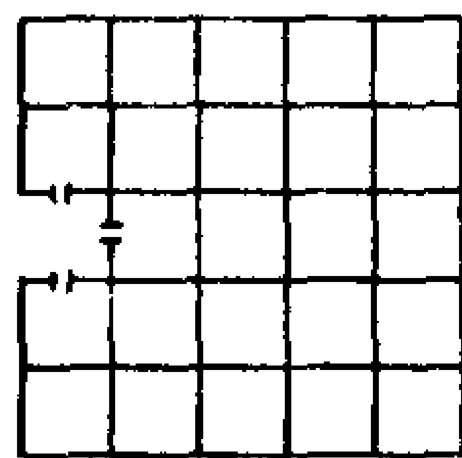


图 20

(2) 可否改变缺口的位置，门的方式不变，使路线成为可能？

(3) 若增加一行(5 个)陈列室，问题又将怎样？

证明 (1) 我们将其缺口补起来，使之成为一个完整的 5×5 正方形，并相间地涂以黑白二色(图 21).由于缺口所在位置为黑格，因而从缺口进出相当于从黑格出发又回到黑格，但每进一格必改变所在格的颜色，因此要从黑格走到黑格，必须经过偶数个方格(包括最后所在方格).特别地要从黑格回到黑格，必须经过偶数个方格.今要求每格到且仅到一次，而且图中共 25(奇数)个方格，因此不存在这样的参观路线.

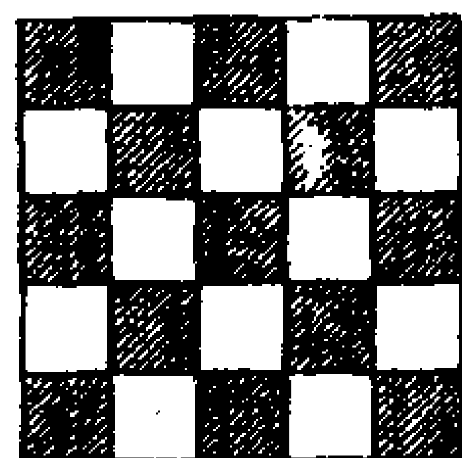


图 21

(2) 无论怎样改变缺口的位置(即使是正方形的中间一个“洞”).要从缺口回到缺口，必须经过偶数个方格(包括缺口所在方格)，因而总不存在这样的路线.

(3) 增加一行(5 个)陈列室，则不论缺口的位置在何处，这样的参观路线总是存在的.

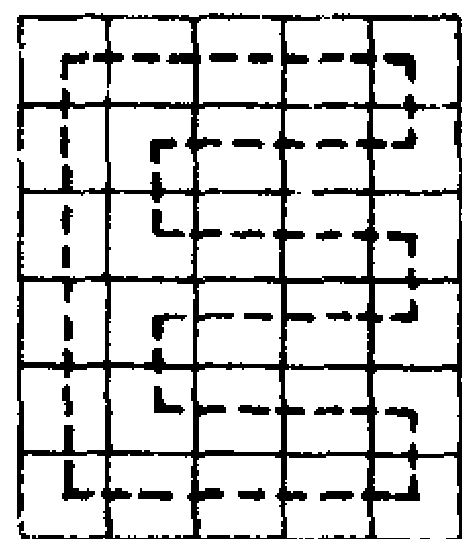


图 22

事实上，如图 22 中的虚线回路经过每个方格恰一次.因此，无论将哪一个陈列室作起始位置，都可按

此回路参观，使得每室到且仅到一次.

[**例 19**] 超级象棋在 12×12 的棋盘上进行，超级马每一步从 3×4 的矩形的一个角走到相对的角. 问它能否走过棋盘中每个方格恰好一次，然后回到出发点？(1985 年第 26 届 IMO 候选题)

解 如果马能走过棋盘中的每个方格恰好一次. 我们将它的第一步、第三步、第五步、……所走到的方格的集合记为 S.

将棋盘按通常的方法涂上黑白两种颜色，马的每一步从一种颜色的方格走到另一种颜色的方格. 因此，在马的路线中，黑格与白格交错出现，也就是 S 由同一种颜色的方格组成.

另一方面，如果将棋盘上的方格分成另两个集：集 A 由第一、二、六、七、十一、十二这六行组成，集 B 由另六行组成. 显然马的每一步从集 A 跳到集 B，而集 B 的格数与集 A 一样多，所以在马的路线中，集 A 的格与集 B 的格交错出现. $S=A$ 或 $S=B$，然而集 A 或集 B 都不是由同一种颜色的方格组成的，矛盾！所以马不能走过每个方格恰好一次.

[**例 20**] 在 8×8 的方格棋盘上最多能放多少个马，它们互不相吃(假定有足够多的马)？(苏联数学竞赛题)

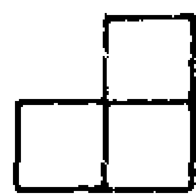


图 23

解 我们将棋盘相间染成黑白二色，则黑格与白格各 32 个. 按马的走法(图 23)知，黑格上的马只能吃白格上的马，因此，将所有黑格都放马，它们是互不相吃的. 这就是说，我们可以放 32 个马，它们互不相吃. 现证任意放 33 个马必有被吃的情形.

事实上，将棋盘划分为 8 个 2×4 的小棋盘，则至少有一

个小棋盘要放 5 个马，其放法只有两种可能：要么一排放 1 个，另一排放 4 个；要么一排放 2 个，另一排放 3 个. 显然这两种放法都不可避免地发生互相"残杀"的结局.

因此，最多能放 32 个马，它们互不相吃.

［**例 21**］ 一个 $m\times n$ 的长方形表中填写了自然数，可以将相邻方格中的两个数同时加上一个整数，使所得的数为非负整数(有一条公共边的两个方格称为相邻的). 试确定充分必要条件，使可以经过有限多次这种运算后，表中各数为 0. (1989 年第 30 届 IMO 候选题)

解 将 $m\times n$ 的表中相邻的方格涂上两种不同的颜色：黑与白. 两种方格中的数的和分别记为 $S_{黑}$，$S_{白}$，令 $S=S_{黑}-S_{白}$. 由于每次运算 S 均保持不变，所以 $S=0$ 是经过若干次运算后，表中各数为 0 的必要条件.

现证明 $S=0$ 也是充分条件. 从表中的第一列开始，设第一列第一行的数为 a，第一列第二行的数为 b，第一列第三行的数为 c.

如果 $a>b$，将 b,c 同时加上 $a-b$，然后再将 a 与 $b+(a-b)=a$ 同时加上 $-a$.

如果 $a\leqslant b$，将 a,b 同时加上 $-a$.

这样进行下去，直至表成为：

0	
0	
…	
0	r
g	h

或

0	
…	
0	r
g	h
0	

如果 $g\leqslant h$，则将 g 与 h 同时加上 $-g$. 如果 $g>h$，则将 r，h 同时加上 $g-h$，然后将 g 与 $h+(g-h)$ 同时加上 $-g$. 总之，我们可以使第一列的数全变成 0. 如此继续下去，可以使

表中只有第 n 列的一个数可能非零,其余各数都变成 0.

由于 $S=0$,所以这时每一个数都是零.

(4) 对区域涂色

[**例 22**] 在 1987×1987 大小的正方形表格的每一个格子中写上绝对值不超过 1 的数,使得在任意的 2×2 方格中的四数之和都等于零. 求证:表格中所有数的和不超过 1987. (1987 年第 21 届全苏数学竞赛题)

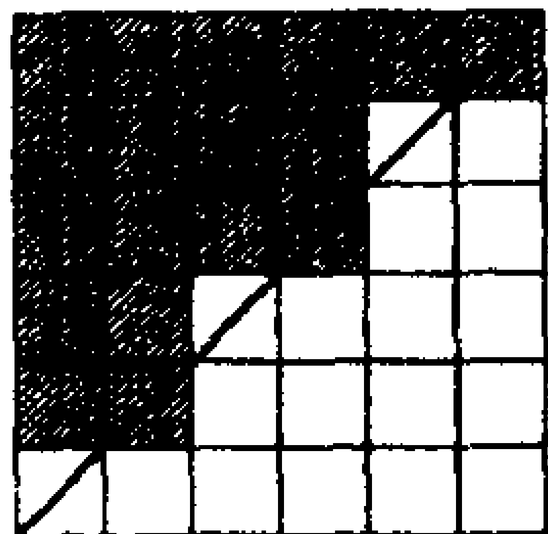


图 24

证明 按图 24 中方法涂色(阴影部分表示涂黑色),并记黑方格的集合为 A, B 是集合 A 关于表格对角线对称的方格集合,$C=A\cap B$,$D\notin A$,$D\notin B$ 的方格集合. 记 A,B,C,D 的格子中数的和分别为 $|A|,|B|,|C|,|D|$,则表中所有数的和 $S=|A|+|B|-|C|+|D|$. 由题意 $|A|=|B|=0$,而 C 和 D 的方格总数恰为对角线上的方格数,即为 1987,因此,$|C|+|D|\leqslant1987$,从而有 $S=|D|-|C|\leqslant1987-2|C|\leqslant1987$.

[**例 23**] 假定在球面上画一地图,这地图上的国家由任意三个都不共点的大圆所确定,求证:如果 n 是 4 的倍数,那么人们不可能作每个国家去一次且只去一次的旅游,这里旅游时规定不准沿边界走,也不准在边界的交叉点处跨越边界.

证明 用数学归纳法不难证明,对于任意 n,可以用黑白两种颜色给所有国家分别着色,使任何两个有公共边界的国家的颜色不同.

由大圆关于球心的对称性推知,球面上每个国家都与另一个国家关于球心互相对称,从一个国家到与它对称的国家去,必须跨越所有的 n 个大圆. 由此知,当 n 是偶数时,两个互相对称的国家所着的颜色必相同,从而黑色国家与白色国家

的数目都是偶数.

对 $n=1,2,\cdots$，不难用递推方法推出球面上的国家总数为 $F=n(n-1)+2$，当 n 是 4 的倍数时，F 为 $4k+2$ 型的数，此时黑白国家的个数不可能相等，否则都等于奇数 $2k+1$，矛盾. 于是黑白国家个数之差至少是 2，但旅游者从一个国家进入另一个国家时，颜色必须改变一次，所经历的不同颜色国家个数之差最多是 1. 这就证明了旅游者不能作每个国家去一次且只去一次的旅游.

［**例 24**］ 凸 n 边形被一些对角线分划为三角形，满足下列条件：(i)从每个顶点发出的对角线的条数都是偶数；(ii)任二对角线除顶点外没有其他公共点. 求证：n 是 3 的倍数.（1973 年波兰数学竞赛题）

首先，我们指出可以用数学归纳法证明："如果平面图形 F 被直线分为 k 部分，那么这些部分可用两种颜色来着色，使任何相邻两部分涂有不同的颜色".

证明 因为已知的 n 边形被一些对角线划分成几个部分，按刚才指出的，分划所得的各个部分可以用两种颜色（比如黑色与白色）着色，使相邻的两个三角形不同色.

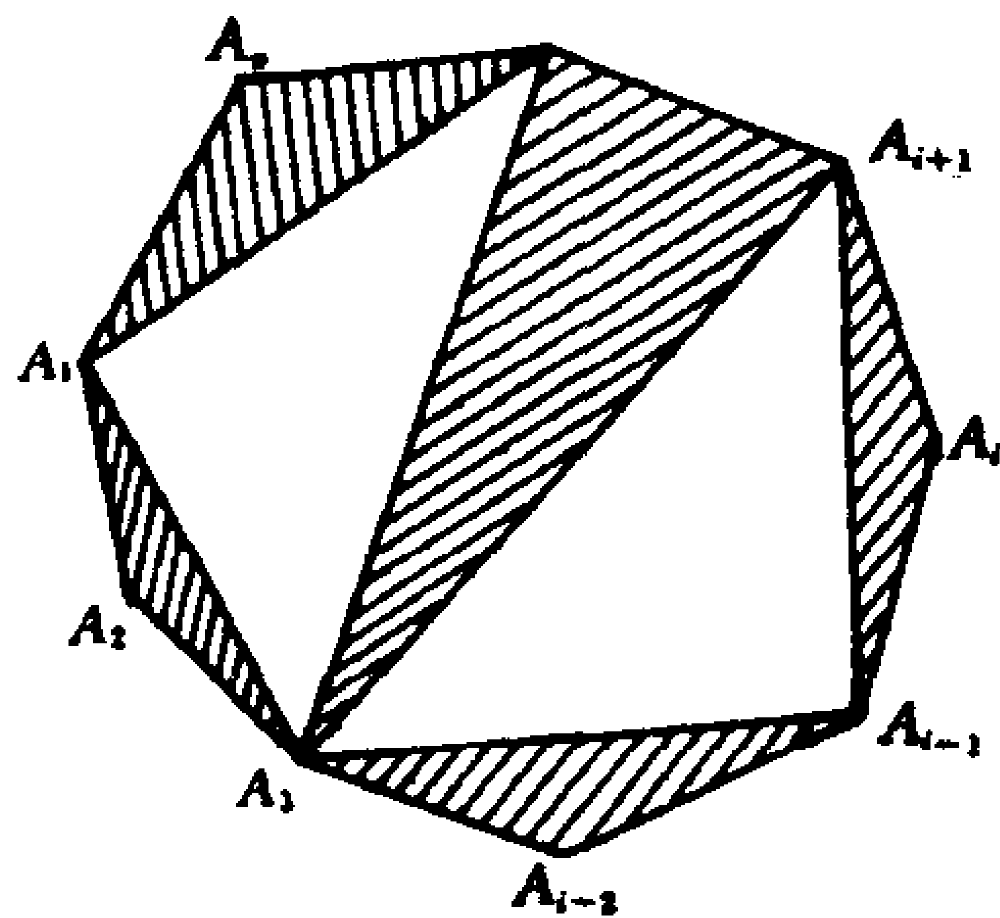


图 25

因为按条件从已知 n 边形的每个顶点 A 所引的对角线条数是偶数，所以，以 A_i 为一个顶点的三角形的个数必是奇数. 由于相邻的三角形着色不同，因而对于每个顶点来说，第一个与最后一个三角形的着色一定相同.

由此可推得，有一边与已知 n 边形的边相重合的三角形

总是着有相同的颜色. 不妨设为"黑色",于是有

n 边形的边数(n)+画出的对角线的条数(l)

=着有"黑色"的三角形的边数之和

=3×着"黑色"的三角形的个数 M_1.

同时,

这个多边形画出的对角线条数(l)

=着有"白色"的三角形的边数之和

=3×着"白色"的三角形的个数 M_2.

$$\therefore \quad n+l=3M_1,\ l=3M_2.$$

两式相减得 $n=3(M_1-M_2)$.

这就是说,n 边形的边数是 3 的倍数.

(5) 对位置涂色

[**例 25**] 某班有 50 位学生,男女各占一半,他们围成一圈席地而坐开营火晚会. 求证:必能找到一位两旁都是女生的学生.(1984 年上海市初中数学竞赛题)

证明 将 50 个座位,相间地涂成黑白两色,假如不论如何围坐都找不到一位两旁都是女生的学生,那么 25 个涂有黑色记号的座位至多坐 12 个女生. 否则一定存在两相邻的涂有黑色标记的座位,其上面都坐着女生,其间坐着的那一个学生与题设导致矛盾. 同理,25 个涂有白色标记的座位至多只能坐 12 个女生,因此全部人座的女生不超过 24 人,与题设相矛盾. 故命题得证.

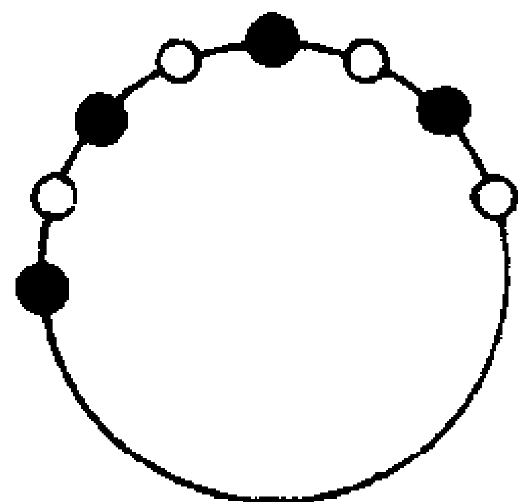


图 26

(6) 其他涂色问题

[**例 26**] 设 a_1, a_2, …是一不减的正整数序列, 对于 $m\geqslant 1$, 定义 $b_m=\min\{n:a_n\geqslant m\}$, 即 b_m 是使 $a_n\geqslant m$ 的 n 的最小值, 若 $a_q=p$, 其中 p, q 为正整数, 求证: $a_1+a_2+\cdots+$

$a_q+b_1+b_2+\cdots+b_p=p(q+1)$.（1985 年第 14 届美国数学竞赛题）

分析 以 $a_3=5$，且 $a_1=1, a_2=3, a_3=5$ 的情况为例试作剖析. 这时，

∵ $a_1\geqslant 1$， ∴ $b_1=1$；

∵ $a_1<2$， $a_2\geqslant 2$，

∴ $b_2=2$； 同理 $b_3=2$；

∵ $a_2<4$， $a_3\geqslant 4$，

∴ $b_4=3$； 同理 $b_5=3$.

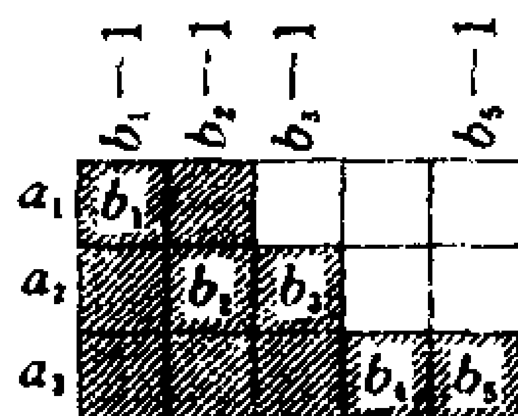


图 27

这个情况正好与如下的构图相吻合：画一个三行五列的方格图，将图中第 i 行左面的 a_i 格涂成黑色，即，使得第 i 行的黑格数均等于 a_i（图 27）.

于是我们看到，第 m 列中从上往下看碰到的第一个黑格，正是最小的 n，使 $a_n\geqslant m$. 这样，第 m 列的白格数正好都等于 b_m-1.

证明 作一个 q 行 p 列的方格图.

将第 i 行（$1\leqslant i\leqslant q$）左边的 a_i 个方格涂黑；在第 j 列（$1\leqslant j\leqslant p$）中的白方格数，就是小于 j 的 a_i 的个数，即 b_j-1. 由此得到

$$a_1+a_2+\cdots+a_q+(b_1-1)+(b_2-1)+\cdots+(b_p-1)=pq,$$

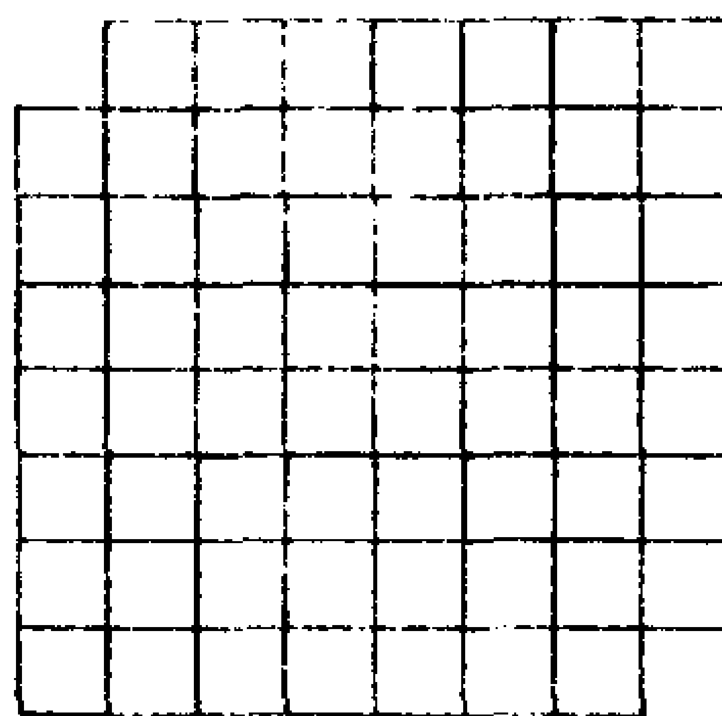
即
$$\sum_{i=1}^{q}a_i+\sum_{j=1}^{p}b_j=p(q+1).$$

习 题 二

1. 如图，有 62 个边长为 1 的正方形，用剪刀剪成 1×2 的矩形（不能用两个小正方形拼接），能否得到 31 个这样的 1×2 矩形？

2. 一个教室有 25 个座位，排成一个 5 行 5 列的正方形，假设开始

时每个座位都有学生坐着，问是否可能改变学生的座位，使得每个学生换到他原来座位的前面、后面、左面和右面的座位上去？



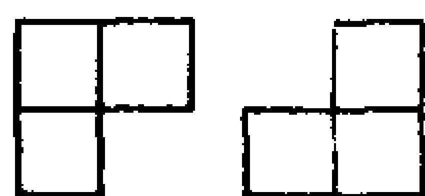
（第 1 题图）

3. 国际象棋中的马能否从左下角的方格开始，经过棋盘上的每个格子恰好一次，最后到达右上角的方格（国际象棋中的马就是先沿一方走两格，再转弯走一格，棋子放在格子中间）？

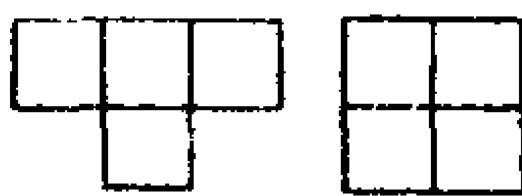
4. 求证：马从中国象棋盘上任意一点出发要跳至它的相邻点，必须经过奇数步.

5. 将一平面分成正六边形形状的相等房间，在某些墙壁上作这样的门，对于任何由三个墙壁汇集（六边形的各边）的顶点，正好两个墙壁上有门. 求证：经过这种迷宫的任何闭路都通过偶数个门.

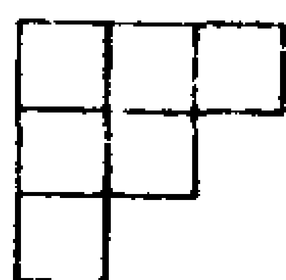
6. 能否用如图中的一块拐角板及 11 块大小为 3×1 的矩形板，不重叠不遗漏地来铺满一个 6×6 的棋盘？



（第 6 题图）



（第 7 题图）



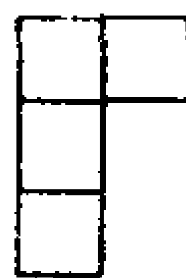
（第 9 题图）

7. 用如图的 15 个 T 字形及 1 个田字形，能否覆盖 8×8 的棋盘？

8. 8×8 的国际象棋盘剪去左上角的一个方格后，能否用 21 个 3×1 的矩形覆盖？剪去哪一个方格才能用 21 个 3×1 的矩形覆盖？

9. 用若干个如图的纸片恰好覆盖一个 $m\times n$ 的棋盘，求证：$12|mn$.

10. 用 15 个 Γ 形（如图）与 1 个田字形能覆盖 8×8 的棋盘吗？

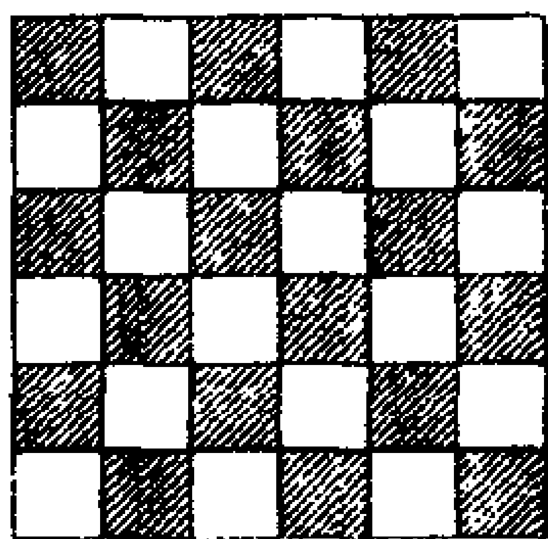


（第 10 题图）

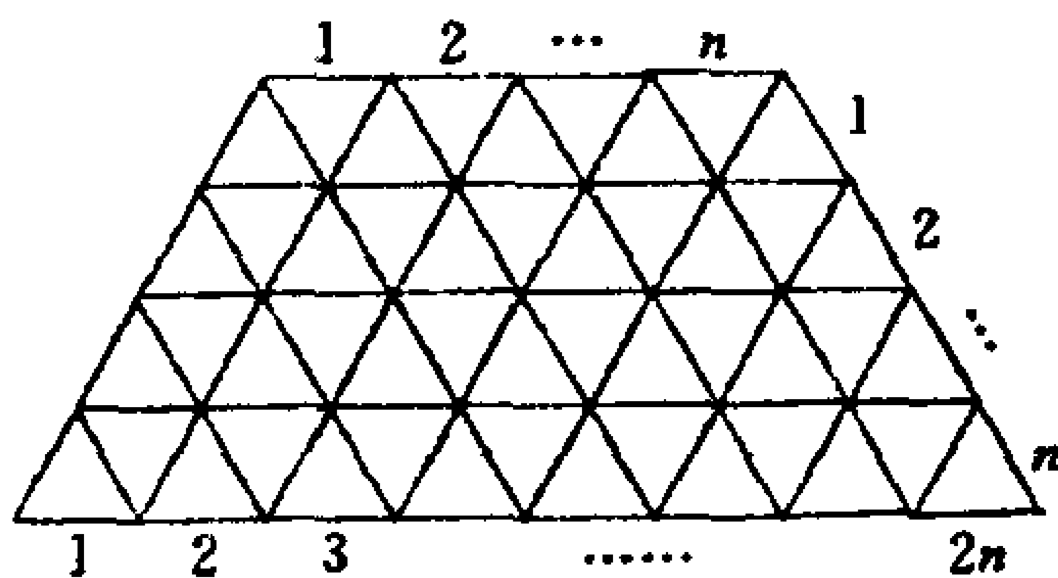
11. 用 T 字形（见第 7 题图）能恰好覆盖 8×8 的棋盘吗？能恰好覆盖 10×10 的棋盘吗？

12. 如图，对于由小方格组成的棋盘通常是用两种颜色来着色. 今要求对棋盘重新着色，使得相邻的两个小方格（指上、下；左、右），以及对角的两个小方格着有不同的颜色，这样至少需要四种颜色. 求证：如果用四种颜色，并且根据上述要求对棋盘着色，那么有某些行或者某些

列仅出现两种不同的颜色.(1990 年第 5 届全国部分省市初中数学通讯赛题)



(第 12 题图)



(第 13 题图)

13. 如图,将半个正六边形等分成 $3n^2$ 个小正三角形,并把这些三角形标上号码 $1,2,3,\cdots,m$,使得号码相邻的三角形有相邻的边.

(1) 当 $n=4$ 时,请你按上述要求给出一种标号,使不能标号的三角形只有 3 个.

(2) 求证:在 $3n^2$ 个三角形中至少有 $n-1$ 个三角形不能按上述要求标号.(1990 年四川省初中数学竞赛题)

14. 在两张 1982×1983 的方格纸涂上红、黑两种颜色,使得每行、每列都有偶数个方格是黑色的.如果将这两张纸重叠时,有一黑格与一红格重合.求证:至少还有三个方格与不同颜色的方格重合.(第 49 届基辅数学竞赛题)

15. 在 9×9 棋盘的每格中都有一只甲虫,根据信号它们(同时沿着对角线)各自爬到相邻的格中.同时有些格中有若干只甲虫,而有些格是空的.求空格数最少是多少?(1989 年第 15 届全俄数学竞赛题)

16. 一张 $2m\times2n$ 的方格纸如果剪去了左上角和右下角的两个方格,试问对余下的部分能不能沿格线剪成完全是 1×2 的矩形纸片?

17. 某展览会共有 $9\times221=1989$ 个展室,相邻两室之间有门相通.问:是否存在这样一个展室,从它开始,可依次而又不重复地走过每一间展室,以后仍回到原展室?

18. 有 9 名科学家,每人至少会讲 3 种语言,每 3 名中至少有 2 人能通话.求证:其中必有 3 人能用同一种语言通话.

2. 标 数 法

标数法与涂色法相类似，其实质就是将某个数学对象分成若干类来讨论，最终使问题获得解决.

（1） 什么是标数法

先从下面的例子谈起.

[例 1] 如图 28 是 14 个 1×1 的正方形组成的图形，求证：无论怎样用剪刀沿着图中直线裁剪，总剪不出七个 1×2 的矩形来.

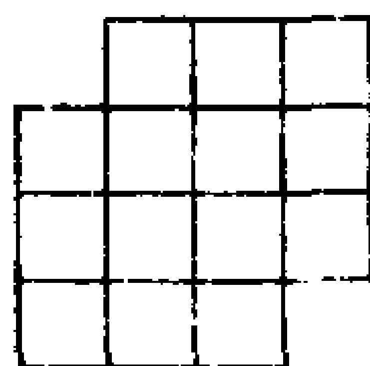


图 28

1	2	1	2
2	1	2	1
1	2	1	2
2	1	2	1

图 29

分析 虽然图中只有 14 个正方形，但是剪法却是多种多样，为了想在各种不同的剪法中找出它们的共同性质，我们可在各个正方形中依次地标上 1，2 两数(图 29). 从图中可见，按题意任意剪下 1×2 的矩形，无论怎样剪法，这个矩形必定是由标上 1 和 2 两数的正方形所组成，这就是各种不同的剪法所具有的共同性质.

证明 用反证法. 如果能剪出七个 1×2 的矩形来，那么从上述分析中可知，一共就有七个由 1 表示的正方形及七个由 2 表示的正方形. 但从图中可知，仅有六个由 1 表示的正方形，而标号为 2 的正方形却有八个，矛盾. 证毕.

由上例可知，所谓标数法，就是把题中的研究对象标上数码进行分类，使问题中隐蔽的条件和关系明朗化，以便研究它

们的共同特性，从而使问题获得简捷巧妙的解法.

(2) 对点标数

[**例 2**] 象棋中的马，每步由 1×2 格的一个顶点跳到其对角顶点. 求证：该马从棋盘上任意一点出发要跳到它的相邻格，必须经过奇数步.

证明 赋象棋盘每个格点 (i,j) 以数 $(-1)^{i+j}$，马每跳一步，必在行和列中，一种增减 2，另一种增减 1，即乘以 $(-1)^{2+1}=-1$.

所以，马跳 k 步后，到它的相邻格点时，必有 $(-1)^{i+j}\cdot(-1)^k=(-1)^{i+j+1}=(-1)^{i+j}\cdot(-1)$，

$$\therefore\quad (-1)^k=-1,\quad \therefore\quad k \text{ 为奇数.}$$

[**例 3**] 在直线 l 上依次排列着 n 个点 $A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n$，每个点涂上红色或蓝色之一，若线段 A_iA_{i+1} 的两端点异色，则称线段 A_iA_{i+1} 为标准线段，又已知 A_1 与 A_n 异色. 求证：直线 l 上的标准线段的条数一定是奇数. (1979 年安徽省中学数学竞赛题)

证明 设 l 上的标准线段共有 k 条，对 n 个点 A_i 赋值：

$$a_i=\begin{cases}1, & \text{若点 } A_i \text{ 是红点；}\\ -1, & \text{若点 } A_i \text{ 是蓝点.}\end{cases}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

于是 $a_1a_n=-1$，$a_i^2=1\,(i=1,2,\cdots,n-1)$. 可见

$-1=a_1a_n=a_1a_na_2^2a_3^2\cdots a_{n-1}^2=(a_1a_2)(a_2a_3)\cdots(a_{n-1}a_n)=(-1)^k$，故 k 为奇数，由此命题得证.

[**例 4**] 已知 $\triangle ABC$ 内有 n 个点(无三点共线)，连同点 A,B,C 共 $n+3$ 个点，以这些点为顶点把 $\triangle ABC$ 分割为若干个互不重叠的小三角形，现把 A,B,C 分别染成红色、蓝色、黄色，而其余 n 个点，每点任意染上红、蓝、黄三色之一. 求证：三顶点都不同色的小三角形的总数必是奇数.

证明 把这些小三角形的边赋值:边的端点同色的,赋值0,边的端点不同色,赋值1,于是每只小三角形的三边赋值的和,有如下三种情形:

(i) 三顶点都不同色的小三角形,赋值和为2;

(ii) 恰有两顶点同色的小三角形,赋值和为3;

(iii) 三顶点同色的小三角形,赋值和为0.

设所有小三角形的边的赋值总和为S,又设情形(i),(ii),(iii)中三类小三角形的个数分别为a,b,c,于是

$$S=3a+2b+0c=3a+2b. \quad ①$$

注意到,所有小三角形的边的赋值总和中,除了边AB,BC,CA外,其余各边都被计算了两次,故它们的赋值和是这些边的赋值和的两倍,再加上$\triangle ABC$的三边,赋值和为3,故S是奇数,因此,由①式得a是奇数.由此命题得证.

注:这个例子,在图论中称为斯潘纳(Sperner)定理.

[**例5**] 将正方形$ABCD$分割为n^2个相等的小方格(n是自然数),把相对的顶点A,C染成红色,把B,D染成蓝色,其他交点任意染成红、蓝两色中的一种颜色.求证:恰有三个顶点同色的小方格的数目必是偶数.(1991年全国初中数学联赛题)

本题的证明体现了典型的奥林匹克技巧,如不变量、数字化、整体化、奇偶分析等.

证法1 当$n=1$时,满足条件的小方格为零个,是偶数.对$n>1$,考虑任一种染色均有:

(1) 改变一个交点的染色,便把以此点为顶点的小方格从满足条件变为不满足条件,或从不满足条件变为满足条件;

(2) 除A,B,C,D外,每一个交点必是偶数个小方格的顶点(两个或四个),因此,改变一个交点的染色并不改变满足

条件小方格的奇偶性.

据此，每次改变一个交点的染色，最终总可以使 B，D 之外的点都为红色. 这时，三顶点同色的小方格只有两个，为偶数.

因此，任意染色时，三顶点同色的小方格为偶数个.

证法 2 用数代表颜色：红色记为 1. 蓝色记为 -1. 将小方格编号，记为 $1,2,\cdots,n^2$. 记第 i 个小方格四个顶点处数字之乘积为 A_i. 若该格恰有三个顶点同色，则 $A_i=-1$，否则 $A_i=1$.

今考虑乘积 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_{n^2}$. 对正方形内部的交点，各点相应的数重复出现 4 次；正方形各边上的不是端点的交点相应的数各出现 2 次；A，B，C，D 四点相应的数的乘积为 $1\times1\times(-1)\times(-1)=1$. 于是，$A_1\times A_2\times\cdots\times A_{n^2}=1$. 因此，$A_1$，$A_2$，$\cdots$，$A_{n^2}$ 中 -1 的个数必为偶数，即恰有三个顶点同色的小方格必有偶数个.

证法 3 将红色记为 0，蓝色记为 1. 再将小方格编号，记为 $1,2,3,\cdots,n^2$. 又记第 1 个小方格四个顶点数字之和为 A_1. 若恰有三顶点同色，则 $A_1=1$ 或 3，为奇数，否则 A_1 为偶数.

在 $A_1+A_2+\cdots+A_{n^2}$ 中，有如下事实：

对正方形内部的交点，各加了 4 次；

原正方形边上非端点的交点，各加了 2 次；

对原正方形的四个顶点，各加了 1 次(含两个 0，两个 1). 因此，

$$A_1+A_2+\cdots+A_{n^2}$$
$$=4\times(\text{内部交点相应的数之和})+$$
$$2\times(\text{边上非端点的交点相应的数之和})+2$$

必为偶数.

于是，在 $A_1, A_2, \cdots, A_{n^2}$ 中必有偶数个奇数. 这就是说，恰有三个顶点同色的小方格必有偶数个.

[**例 6**] (哈密顿周游世界问题)在菱形十二面体表面上有 14 个城市，一个旅游人沿十二面体的棱线希望不重复地游览全部城市，这个旅游人的希望能实现吗？为什么？

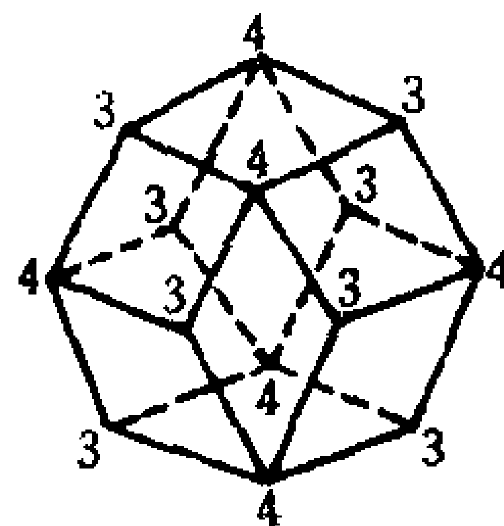


图 30

解 这个旅游人的希望不能实现. 因为从图中可知，这 14 个城市有两种类型：一类城市向外连接三条路(棱)，在图中填上"3"；另一类城市向外连接四条路(棱)，在图中填上"4". 于是 14 个城市中，有 8 个城市都向外连接三条路，有 6 个城市都向外连接 4 条路. 又由图 30 可知，每个"3"城市都被"4"城市包围，每个"4"城市都被"3"城市包围，所以旅游人希望不重复地游览全部城市，必定是"3"城市与"4"城市交替地游览. 如果旅游人的希望能实现，那么游览了这 14 个城市的旅游人必定是游览了 7 个"3"城市，7 个"4"城市，这与已知矛盾.

说明 本例是有趣的菱形十二面体表面上不存在哈密顿道路的结论. 但是对一般的多面体，在其表面上哈密顿道路存在的充要条件是什么，至今尚未解决.

[**例 7**] 如图 31 是半张中国象棋盘.

(1) 一只马跳了 n 步回到起点，求证：n 是偶数；

(2) 一只马能否跳遍这半张象棋盘，每点都不重复，最后的一步跳回起点？

(3) 一只马能否从 A 点出发，跳遍这半张象棋盘，每点都不重复，最后跳到除 A 以外的另外一点？

(4) 一只车从位置 B 出发，在这半张象棋盘上走，每步走一格，走了若干步后，到了位置 A. 求证：至少有一个点没被

走过或被走过不止一次.

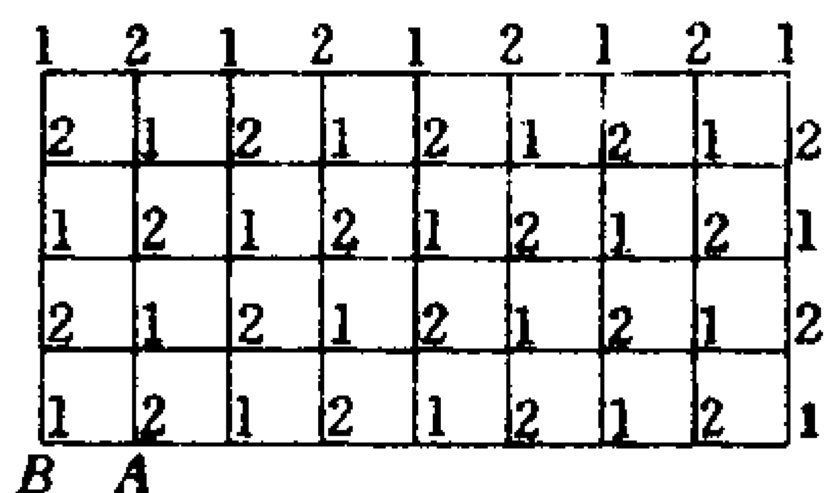


图 31

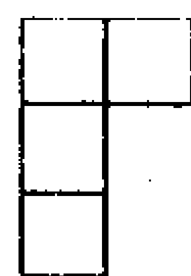
解 (1) 如图 31,先在棋盘上各点处依次地以 1,2 相间地标记. 不妨假设马从 1 号位置出发,那么马每走一步,无论怎样走法,它只能是从 1(2)号位置跳到 2(1)号位置. 因此,马从 1 号位置出发,再跳到 1 号位置,必须跳偶数步才能做到. 现在已知马跳了 n 步回到起点(即 1 号位置),所以 n 是偶数.

(2) 因半张棋盘上共有 $5\times9=45$ 点,所以马从某点出发,不重复地跳遍每一点,共要 45 次(奇数次)才回到起始位置,但这与结论(1)矛盾,因此一只马不能跳遍这半张象棋盘.

(3) 因半张棋盘上共有 45 点,马从 A 点出发,不重复地跳遍各点,共需跳 44 次,由结论(1)的证明中可知,马总共跳过 1 号位置的点与 2 号位置的点各有 22 个,但从图中可知,除 A 点外,标有 2 号位置的点仅 21 个,因此这种跳法是不存在的.

(4) 用反证法. 若结论不成立,则车从位置 B 出发,不重复地走遍半张棋盘,并在最后一步走到了位置 A,那么车共走了 44 步,据题设车从第一步走到第 44 步,它们的点上的标数应是 2,1,2,1,…,2,1,因此,走到第 44 步 A 点处应标数为 1,但这与图中 A 点标的数 2 矛盾. 由此(4)得证.

(3) 对区域标数

[**例 8**] 将 8×8 方格纸板的一角剪去一个 2×2 的正方形,问余下的 60 个方格能否剪成 15 块形如“”的小纸片”(第 4 届东北三省数学邀请赛试题)

解 如图 32 填入±1,则任一符合要求的"Γ"形四连格中的数字之和或为 2 或为-2. 若能分成 15 块"Γ"形四连格,设其中数字和为 2 的有 x 块,数字和为-2的有 y 块. 则

$$\begin{cases}x+y=15,\\2x-2y=0.\end{cases}$$

解得 $x=y=\dfrac{15}{2}$,不是整数,矛盾.

+1	−1	+1	−1	+1	−1	+1	−1
+1	−1	+1	−1	+1	−1	+1	−1
+1	−1	+1	−1	+1	−1	+1	−1
+1	−1	+1	−1	+1	−1	+1	−1
+1	−1	+1	−1	+1	−1	+1	−1
+1	−1	+1	−1	+1	−1	+1	−1
+1	−1	+1	−1	+1	−1		
+1	−1	+1	−1	+1	−1		

图 32

所以,题中所给的60个方格不可能剪成"Γ"形四连格小纸片.

[**例 9**] 图 33 是一个有 24 个展室的平面图,每相邻两室有门相通,如果参观者从进口入内,出口出来,希望每间展览室都走到而又不重复,那么参观者的愿望能实现吗? 为什么?

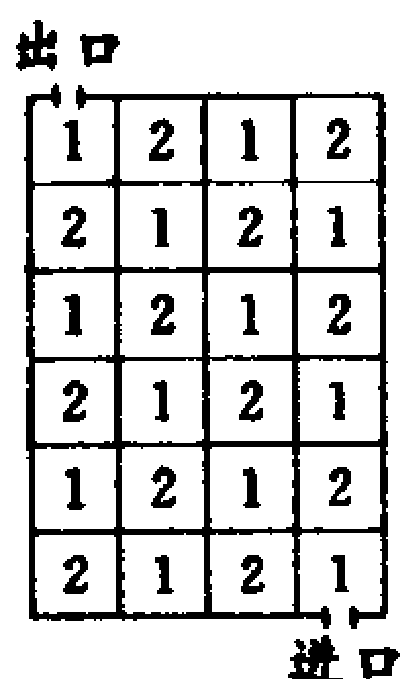


图 33

解 参观者的愿望不能实现,先把图 33 中相邻两室用 1,2 两数表示. 若进口室是 1,则出口室也是 1,由此可见,参观者无论怎样参观,其路线必然是 $1\to2\to1\to2\to\cdots\to2\to1$,因而必然经过奇数个展览室,但图中的展览室共有 24 间,是个偶数,因此,参观者欲每室都走到又不重复的参观路线是不存在的,由此得证.

说明 (1) 用上述方法可把本例推广到 $2n\times2m=4mn$ 间展览室的情形(m,n 是正整数);

(2) 如有 $m\times n=mn$ 间展室,m,n 中至少有一个奇数,那么参观者的愿望是能实现的.

[**例 10**] 在 8×8 的小方格棋盘上剪去左上角一个小方

格，求证：剩下的棋盘不能用 21 块 1×3 的矩形覆盖.

证明 用标数法，把全体小方格分别标上 1,2,3，不管 1×3 的矩形怎样铺在图中，每一个 1×3 的矩形恰好盖住有 1,2,3 的小方格各 1 个，因此，如果 21 块 1×3 的矩形能覆盖这个棋盘，那么标有 1,2,3 的小方格各有 21 个，但图中标有 1 的方格仅有 20 个，矛盾！因此得证.

	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3

图 34

1	2	3	4	1	2	3	4
2	3	4	1	2	3	4	1
3	4	1	2	3	4	1	2
4	1	2	3	4	1	2	3
1	2	3	4	1	2	3	4
2	3	4	1	2	3	4	1
3	4	1	2	3	4	1	2
4	1	2	3	4	1	2	3

图 35

[**例 11**] 求证：用 15 块大小是 1×4 的矩形瓷砖和 1 块大小是 2×2 的正方形瓷砖，不能恰好铺盖 8×8 的正方形地面.(1986 年第 2 届全国部分省市初中数学通讯赛题)

证法 1 把 8×8 的正方形地面上 64 个小方格依次赋值 1,2,3,4(图 35). 无论 1×4 的矩形瓷砖怎样盖在图中所示的地面上，每块 1×4 的矩形瓷砖恰好盖住赋有 1,2,3,4 的小方块各 1 个，可见 15 块 1×4 的矩形瓷砖恰好盖住赋有 1,2,3,4 的小方格各 15 个，而一块 2×2 的正方形瓷砖无论盖在何处，只有如下四种情形之一：

1	2
2	3

2	3
3	4

3	4
4	1

4	1
1	2

图 36

这就是说，2×2 的正方形瓷砖所盖住的 4 个小方块中，必有两个小方块有相同数码. 由此可见，如果 15 块 1×4，1 块 2×

2 的瓷砖恰好能铺盖 8×8 的正方形地面，那么这 64 个小方块中，某一种赋值的小方块应有 17 块，但实际上，赋值 1，2，3，4 的小方块各 16 块，矛盾.

证法 2 赋值方法同证法一，如果能够恰好盖住，注意 1×4 小矩形瓷砖赋值之和是 1+2+3+4=10，所以，15 个 1×4 的小矩形瓷砖赋值的和是 10×15 不是 4 的倍数. 而一块 2×2 的正方形瓷砖上赋值的和，或为 8，或为 12，都是 4 的倍数，因此，所有各块赋值的总和不是 4 的倍数. 但图中各块赋值总和为 4 的倍数，矛盾.

说明 利用证法 2 可把本例推广为如下命题：求证用 k 块 1×4 的矩形瓷砖和 $4n^2-k$ 块 2×2 矩形瓷砖不能恰好铺盖 $2n\times 2n$ 的正方形地面（k 为奇数，$1\leqslant k\leqslant 4n^2$）.

(4) 对某个数学对象或某种状态标数

[例 12] n 个人围坐一圈，每相邻四人中，若女的不成双，则这四人各罚出一筹，若女的成双，则这四人各取得一筹. 结果取得筹数正是所罚筹数. 求证：n 是 4 的倍数.

证明 赋 n 人以 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，其中 $x_1^2=x_2^2=\cdots=x_n^2=1$，+1 表示男，−1 表示女，$x_ix_{i+1}x_{i+2}x_{i+3}<0$ 表示 $x_i,x_{i+1},x_{i+2},x_{i+3}$ 各罚出一筹，$x_ix_{i+1}x_{i+2}x_{i+3}>0$ 表示 $x_i,x_{i+1},x_{i+2},x_{i+3}$ 各取得一筹.

$\because$ 所罚筹数 = 所得筹数，

$\therefore$ $x_1x_2x_3x_4+x_2x_3x_4x_5+\cdots+x_nx_1x_2x_3=0$，

左边 n 项中，正项数与负项数相同，设各为 k 项，

$\therefore$ $n=2k$，

$\therefore$ $(x_1x_2x_3x_4)(x_2x_3x_4x_5)\cdots(x_nx_1x_2x_3)=(-1)^k=1$，

$\therefore$ $k=2l$.

故 $n=2k=4l$，即 n 是 4 的倍数.

［**例 13**］ 男女若干人围坐一圆桌，然后相邻两人间插上一朵花，同性者中间插一红花，异性者中间插一蓝花．若所插红花与蓝花数相等，求证：男女人数总和是 4 的倍数．

证明 先分别对人赋值：男人赋值＋1，女人赋值－1．这样，红花在(＋1)(＋1)或(－1)(－1)之间插入(注意其积为＋1)；蓝花在(＋1)(－1)或(－1)(＋1)之间插入(注意其积为－1)．这样问题转化为：

已知 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是一组数，且它们均为＋1 或－1．若 $x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_{n-1}x_n+x_nx_1=0$，则 n 是 4 的倍数．

设 $y_i=x_ix_{i+1}(i=1,2,\cdots,n-1)$，$y_n=x_nx_1$，则 y_i 不是＋1 就是－1，又因为 $y_1+y_2+\cdots+y_n=0$．故其中＋1 与－1 的个数相同，设为 k，所以 $n=2k$．又 $y_1y_2\cdots y_n=1$，即 $(-1)^k=1$．$\therefore k$ 也是偶数，故 $n=4l$ 是 4 的倍数．

［**例 14**］ 某班有 49 位同学，坐成七行七列，每个座位的前、后、左、右的座位叫它的"邻座"．要让这 49 位同学中的每一位都换到他的邻座上去，问这种调换座位的方案能不能实现？

解 如图 37，赋每个座位以数＋1 或－1，邻座的数不同，换位的原则是：凡坐在－1 上的都必须换到＋1 上去；凡坐在＋1 上的应当换到－1 上来．那么，参加换位的＋1 和－1 就一样多，其和为 0．但图中－1 比＋1 多一个，这 49 个数之和是－1，这就是说，上面换位的方案实际上是不可能的．

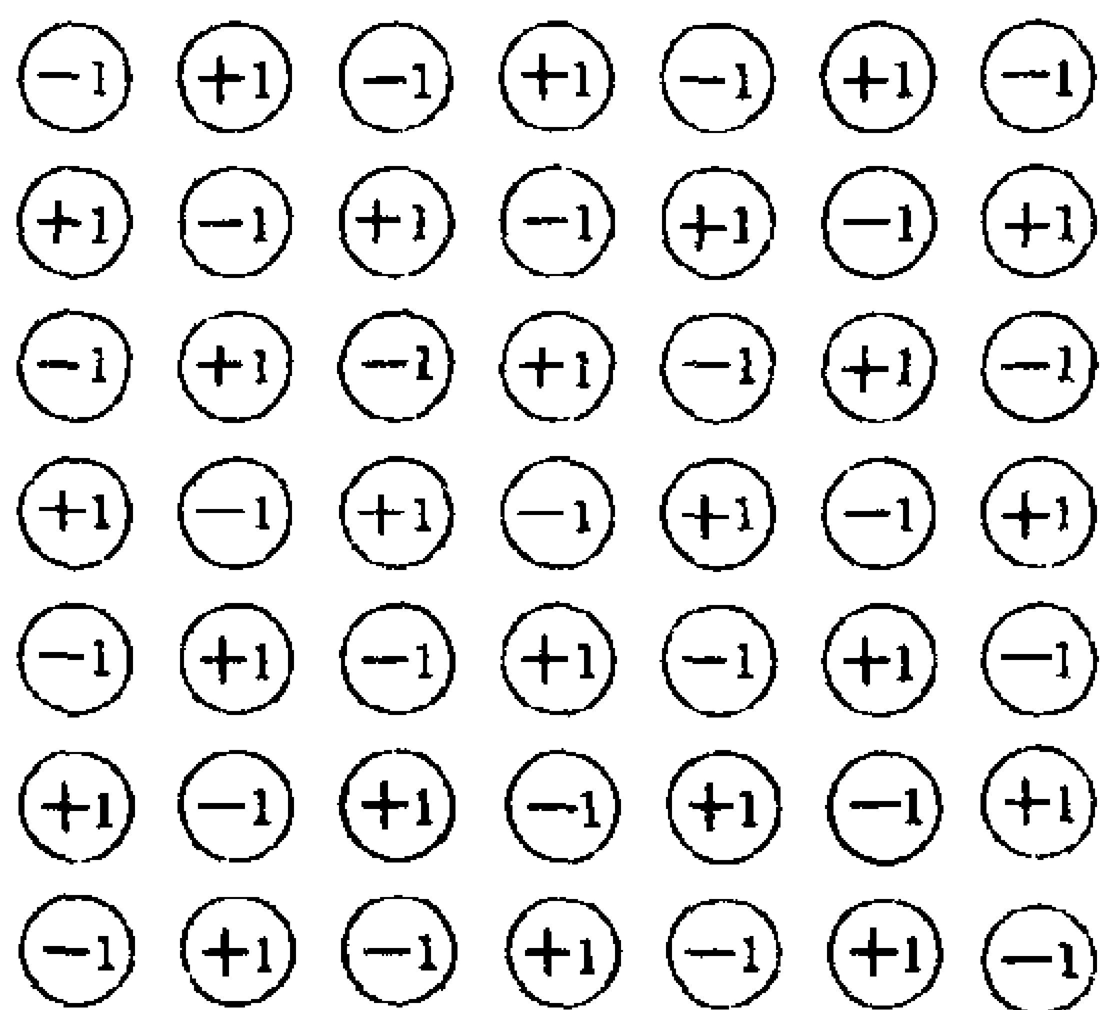


图 37

［例 15］ 在圆周上均匀地放 4 枚围棋子，规定操作规则如下：原来相邻棋子若同色，就在其间放一枚黑子，若异色，就在其间放一枚白子，然后把原来的 4 枚棋子取走，完成这程序，就算一次操作．求证：无论开始时圆周上的黑白棋子的排列顺序如何，最多只须操作 4 次，圆周上就全是黑子了．

证明 据题意，对开始时的第 1，2，3，4 这四枚棋子，依次地用 x_1, x_2, x_3, x_4 表示，且赋值为

$$x_i=\begin{cases}1, & 若第\ i\ 子为黑子；\\ -1, & 若第\ i\ 子为白子．\end{cases}\quad (i=1,2,3,4)$$

则 $x_i^2=1$，且

$$x_i x_{i+1}=\begin{cases}1, & 若第\ i\ 子与第\ i+1\ 子同色；\\ -1, & 若第\ i\ 子与第\ i+1\ 子异色．\end{cases}$$

$$(i=1,2,3,4, x_n=x_1)$$

因此，各次操作后，棋子的赋值情况如下：

开始	x_1	x_2	x_3	x_4
第一次操作后	x_1x_2	x_2x_3	x_3x_4	x_4x_1
第二次操作后	$x_1x_2^2x_3=x_1x_3$	$x_2x_3^2x_4=x_2x_4$	$x_3x_4^2x_1=x_3x_1$	$x_4x_1^2x_2=x_4x_2$
第三次操作后	$x_1x_2x_3x_4$	$x_1x_2x_3x_4$	$x_1x_2x_3x_4$	$x_1x_2x_3x_4$
第四次操作后	1	1	1	1

这是因为 $(x_1x_2x_3x_4)^2=1$，因此，最多只须操作四次，圆周上全是黑子了．

［例 16］ 一个箱子里装有 p 个白球和 q 个黑球，箱子旁边还有一堆黑球．从箱子里取出两球：如果这两个球是同颜色的，则从箱外取出一个黑球放回箱子里；如果这两个球是异色的，则把其中的白球放回箱子．这个过程一直重复到最后一对球从箱子取出，并且最后一个球放回箱子．试问最后一对球有没有可能是白色的？并说明理由．

分析 若在白球上记上数字 1，黑球上记上数字 0，则任何时候箱中的白球数就等于箱内所有球的数字之和 S，并且开始时总和为 P，如果取的两个球是白色，则放回一个黑球，故总和变成 $S=P-2$. 如果取的两个球是黑色，则放回一个黑球，故总和变成 $S=P$. 如果取出的两球是一黑一白，则放回这个白球，故总和变成 $S=P$.

由此可知，每完成一个过程，箱子里球的数字之和或者不变，或者减少 2，即变换前后 S 的奇偶性不变. 故 P 为偶数时，最终将变成 0(黑球)；P 为奇数时，最后必将是 1(白球).

[**例 17**] m 只茶杯，杯口朝上，将其中 n 只($n\leqslant m$)翻转过来，即杯口朝上的变为杯口朝下，朝下的变为朝上，称为一次"运动"，试问能否经过有限次运动，使得茶杯的杯口全部朝下？

分析 我们把杯口朝上的杯子对应于$+1$，朝下的杯子对应于-1. 为了刻划这种翻转运动，我们引入目标函数 $S=\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2\cdots\varepsilon_m$，其中 ε_i 表示第 i 个杯所对应的数字. 现若把其中 n 个杯翻转目标函数值变成 $S'=d_1d_2\cdots d_m$. 则在 $\varepsilon_i\cdot d_i$ 中，有 n 对的乘积为-1，其余乘积为$+1$，$\therefore S\cdot S'=(-1)^n$.

因为开始时 m 只杯子杯口朝上，故 $S_0=1$，利用上面结果，可得序列$\{S_n\}$：

$$1,(-1)^n,1,(-1)^n,1,(-1)^n,\cdots$$

若经有限次运动能使杯口全部朝下，即目标函数值变成$(-1)^m$，则必有$(-1)^m=1$ 或者$(-1)^m=(-1)^n$. 于是就得到问题有解的必要条件为：m 为偶数或者 m,n 具有相同的奇偶性. 这个条件也可换成如下等价形式：n 为奇数或者 m,n 同为偶数.

下面指出，上述条件也是充分的.

(1) 当 n 为奇数时，我们把杯子依次编上号码 1,2,3，…，m，并依次作如下运动：

第一次，翻转 $1,2,3,\cdots,n$；

第二次，翻转 $2,3,4,\cdots,n+1$；

……

第 $m-1$ 次，翻转 $m-1,m,1,\cdots,n-2$；

第 m 次，翻转 $m,1,\cdots,n-1$.

这样经过 m 次翻转后，每一个杯子都被翻转了 $\frac{m\times n}{m}=n$ 次，这是一个奇数，因而每个杯子都由原来的 $+1\to-1$，也即全部杯口朝下.

(2) 当 m,n 同为偶数时，这时我们可以证明更一般命题：可以经有限多次运动将 m 个杯口的一种初始状态全部变成它的相反状态.

我们对 m 进行归纳($m\geqslant n$). $m=n$ 时，显然翻转一次就达到目的，故命题成立. 现设 $m=2k\geqslant n$ 时命题成立，考虑 $m=2k+2$ 的情形，设 $2k+2$ 个杯口的初始状态为 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_{2k},\varepsilon_{2k+1},\varepsilon_{2k+2}$，我们采取如下的翻转策略来运用归纳假设：

不动 ε_{2k+1} 和 ε_{2k+2}，光变动 $2k$ 个杯 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\cdots,\varepsilon_{2k}$，由归纳假设，每次翻转其中 n 个，可变为它的相反状态，即变成 $\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2,\cdots,\bar{\varepsilon}_{2k},\varepsilon_{2k+1},\varepsilon_{2k+2}$.

我们再保持 $\bar{\varepsilon}_1$ 与 ε_{2k+1} 不动，变动其他 $2k$ 个杯子，则可变成 $\bar{\varepsilon}_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_{2k},\varepsilon_{2k+1},\bar{\varepsilon}_{2k+2}$.

最后，我们再保证 $\bar{\varepsilon}_1$ 与 $\bar{\varepsilon}_{2k+2}$ 不变，变动其他 $2k$ 个杯子，则可变成 $\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2,\cdots,\bar{\varepsilon}_{2k},\bar{\varepsilon}_{2k+1},\bar{\varepsilon}_{2k+2}$，这正是所需要的.

[**例 18**] $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 这 n 个球队进行单循环比赛(全部比赛过程中任何一队都要分别与其他各队比赛一场且只比

赛一场). 当比赛进行到一定阶段时,统计 $A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}$ 这 $n-1$ 个球队已经赛过的场数为:A_1 队 $n-1$ 场,A_2 队 $n-2$ 场,$\cdots$,A_{n-1} 队 1 场,请你判定哪些球队之间已经互相比赛过,其中 A_n 队比赛过多少场?

分析 本题除运用图论知识求解外,也可以仿照矩阵,借助表格进行分析求解.

表中数字的填写规律为:

$$a_{ij}=\begin{cases}1(A_i \text{ 与 } A_j \text{ 比赛过}),\\ 0(A_i \text{ 与 } A_j \text{ 未赛过}).\end{cases}$$

	A_1	A_2	A_3	$\cdots$	A_{n-2}	A_{n-1}	A_n	
A_1	0	1	1	$\cdots$	1	1	1	$n-1$
A_2	1	0	1	$\cdots$	1	0	1	$n-2$
A_3	1	1	0	$\cdots$	0	0	1	$n-3$
$\vdots$								$\vdots$
A_{n-2}	1	1	0	$\cdots$	0	0	0	2
A_{n-1}	1	0	0	$\cdots$	0	0	0	1
A_n	1	1	1	$\cdots$	0	0	0	x

我们约定 A_i 与 A_i 未赛过. 这个矩阵应是对称矩阵,表中最右边的数字为对应球队已经比赛过的场数.

考虑 A_1,它赛过了 $n-1$ 场,故应有 $n-1$ 个 1,故除 $a_{11}=0$ 外,其余皆为 1. 这时 A_{n-1} 已赛足. 故其余都是 0.

再考虑 A_2,它赛了 $n-2$ 场,已经有了两个 0,故其余应填上 1. 这时 A_{n-2} 已赛足,故其余为 0.

由此可知,对于 A_n 这一行的前面 $n-1$ 个数($a_{nn}=0$ 除外),将是前面若干个为 1,后面若干个为零,并且 1 与 0 首尾搭配.

当 n 为奇数时,$n-1$ 为偶数,从而有 $\frac{n-1}{2}$ 个 1,$\frac{n-1}{2}$ 个

0，即 $x=\frac{n-1}{2}$.

当 n 为偶数时，$n-1$ 为奇数. 考虑 $A_{\frac{n}{2}}$，由已知它应赛过 $n-\frac{n}{2}=\frac{n}{2}$场. 但它并不与 $A_{\frac{n}{2}+1},\cdots,A_{n-1}$各队比赛，而与 A_1，$A_2,\cdots,A_{\frac{n}{2}-1}$仅赛了$\frac{n}{2}-1$ 场，故还有一场，显然它应与 A_n 比赛过. 从而 A_n 与 $A_1,A_2,\cdots,A_{\frac{n}{2}}$比赛过，$x=\frac{n}{2}$.

综上所述，可知 $x=\left[\frac{n+1}{2}\right]$.

至于哪些球队之间互相已赛过，则从表格中便一目了然.

［**例 19**］ $n(>3)$名乒乓球选手进行单打比赛若干场后，任意两个选手已赛过的对手恰好都不完全相同. 求证：总可以从中去掉一名选手，而使在余下的选手中，任意两个选手已赛过的对手仍然都不完全相同.（1987 年全国高中数学联赛题）

把 n 名选手 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 像上例那样排列成一个方阵：在第 i 行第 i 列的交叉处填上实数 a_{ij}：

$$a_{ij}=\begin{cases}0\ (A_i 与 A_j 未赛过),\\ 1\ (A_i 与 A_j 已赛过).\end{cases}$$

我们还规定 $a_{ii}=0$. 于是这个表格中的每一行都对应于一个 n 维向量 $A_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})(i=1,2,\cdots,n)$，当且仅当它们各对应分量都相等时，才认为这两个向量相等. 显然，向量中数码 1 的排列位置，就表示相应的选手与 A_i 比赛过. 依题意，开始时这 n 个向量均不相同. 现在要证明的是：可以从中去掉某一列，使余下的每一行所表示的 $n-1$ 维向量也不相同.

当然，我们可以抽象概括成一个更为广泛的命题：

有 $n\times m$ 的实数排成 n 行 n 列($n\geqslant 2,m\geqslant 3$)，若任意两行均不相同，则总可以去掉某一列，使余下的数表中，任意两行

仍不相同.

这个命题可以用数学归纳法加以证明，对行数 n 进行归纳加以证明，这里从略.

[例 20] 戏院票房前有 $2n$ 人排队买票，其中 n 个人只有 5 角纸币，其余 n 个人只有 1 元一张的纸币. 在开始买票时，票房里无钱可找，而每个人只要买一张 5 角的票. 问买票的人排成的队使买票的过程中不致于票房无钱可找的方法有多少种?

解 我们可以把一个实际问题先对应于一个数学模型: $2n$ 个人排队成数列 $x_1, x_2, \cdots, x_{2n}$. 持五角票者 $x_i=0$，持一元票者 $x_i=1$，于是

$$\sum_{i=1}^{2n} x_i = n(n \text{ 人有 5 角票}, n \text{ 人有一元票}),$$

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_j \leqslant \frac{1}{2} j. \ (j = 1, 2, \cdots, 2n)$$

(任何一个 j 之前，5 角票不比 1 元票少，即 0 的个数不小于 1 的个数，故 $\sum_{i=1}^{j} x_i$ 至多有一半项是 1.)

把此代数模型与一个几何模型一一对应: 以 x_j 的下标 j 表示点的横坐标，约定

$$\text{对}(j-1, y_i)\begin{cases} \text{若 } x_j=0, \text{则下一点}(j, y_{i-1})\text{递减}; \\ \text{若 } x_j=1, \text{则下一点}(j, y_{i+1})\text{递增}. \end{cases}$$

当约定一个起点(一般取(0,0))后，$(x_1, x_2, \cdots, x_{2n})$ 就表示一条由 $2n+1$ 个点组成的路径，其几何意义为:

(i) 因 0 与 1 个数相等，故起点与终点在一水平线上(即终点是 $(2n, 0)$).

(ii) 从起点起第一点必递减，即第一个购票者必须

拿 5 角，故 $x_1=0$，其余整条路线都在 x 轴下方 $\left(因\sum_{i=1}^{j}x_i\leqslant\frac{1}{2}j，不能越过 x 轴，仅能接触\right)$.

设这种路线集合为 S_{2n}，显见，排队方式集合与 S_{2n} 一一对应，只须求 $|S_{2n}|$——由 $(0,0)$ 到 $(2n,0)$ 的不经过 x 轴的路径数.

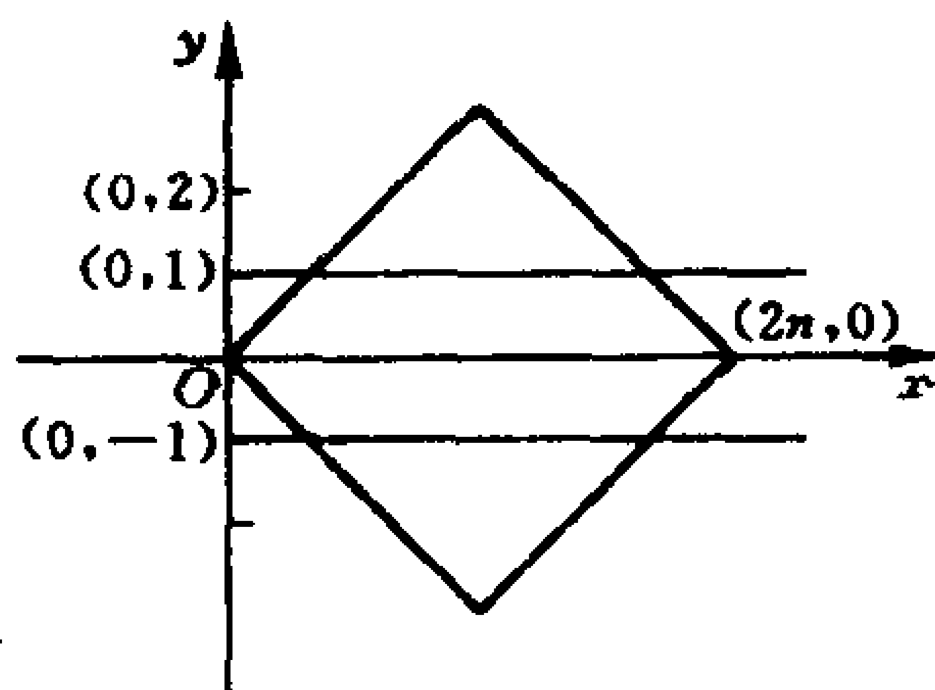


图 38

显见，由 $(0,0)$ 到 $(2n,0)$ 到 $(2n,0)$ 的所有路径数为 $\frac{(n+n)!}{n!\ n!}=\frac{(2n)!}{n!\ n!}$.

现仅需考虑越过 x 轴的上述路径数，即与 $y=1$ 接触的路径数 T，则 $\frac{(2n)!}{n!\ n!}$ 即为所求.

作 $(0,0)$ 对于 $y=1$ 的对称点 $(0,2)$，则每一条 T 路径一一对应于一条由 $(0,2)$ 到 $(2n,0)$ 的路径，故所求为 $C_{2n}^{n}-C_{2n}^{n-1}=\frac{1}{n}C_{2n}^{n-1}$(Catalan 数).

[**例 21**] 在一次选举中，A 得 p 票，B 得 q 票($p>q$). 试问：使 A 的票数一直领先的唱票方式有多少种？

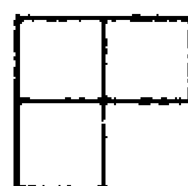
解 唱 A 得一票赋值 1，唱 B 得一票赋值 -1. 这样问题转化为：由 p 个 1 和 q 个 -1 组成的排列 x_1，x_2，…，x_{p+q} ($x_k^2=1$，$k=1$，2，…，$p+q$)中，使对任何自然数 k，有 $S_k=x_1+x_2+\cdots+x_k>0$ 的排列有多少个？ 为此，我们在直角坐标系中描出所有的点 $P_k(k,S_k)$($k=1$，2，…，$p+q$)，依次连结 OP_1，P_1P_2，…，$P_{p+q-1}P_{p+q}$，得到一条从原点 O 到点 P_{p+q} 的折线，从而问题又转化为：这样的折线中，与 x 轴无交点的折线有多少条？

首先，从 O 到 P_{p+q} 的折线共有 C_{p+q}^{p} 条，因为整个折线由 p 条斜率为 1 和 q 条斜率为 -1 的线段组成，可任选这 $p+q$ 条线段中的 P 条使其斜率为 1；其次，假定某条折线 l 与 x 轴有交点，且 OP_1 的斜率为正. 设 l 第一次与 x 轴交点为 P_k，那么，将从 O 到 P_k 的折线以 x 轴为轴翻转到 x 轴下方，即得从 O 到 P_{p+q} 与 x 轴有交点的另一折线，但 OP_1 的斜率为负. 反之，由后一折线也可得前一折线. 注意到 P_{p+q} 在 x 轴上方，因此折线中若 OP_1 的斜率为负则必与 x 轴有交点. 此即从 O 到 P_{p+q} 与 x 轴有交点且 OP_1 的斜率为负的折线条数. 于是，从 O 到 P_{p+q} 的折线中与 x 轴无交点的折线有 $C_{p+q}^{p}-2C_{p+q-1}^{p}=C_{p+q}^{p}(p-q)/(p+q)$ 条，这也就是原问题中的唱票方式数.

习 题 三

1. 一个棋子在 8×8 格棋盘上或上或下或左或右移动一格，都算作一步，求证该棋子不能经 1995 步由一角移到它的对角.

2. 在 8×8 的棋盘左上角剪去 1×1 的小方格一块，求证：剩下的棋盘能用 21 个如图所示的“L”型的纸铺满.



（第 2 题图）

3. 求证：用 63 块 1×16 的矩形瓷砖和 1 块 4×4 的正方形瓷砖，不能恰好铺盖 32×32 的正方形地面.

4. 在 $2m$ 行 n 列棋盘上去掉两格，剩下 $2mn-2$ 格，问能否被 $mn-1$ 块 1×2 格的骨牌完全盖住？

5. 有 n 个青年围坐一圈，于每二人之间放一包糖，现在把糖作这样的调整：凡男女之间的糖拿走，同男同女之间的糖都改为两包. 经调整后，糖的包数不变，求证：n 为 4 的倍数.

6. 已知 m 个非零实数 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 中共有 n 个负实数（n 为奇数），规定这 m 个实数中任意改变其中 k 个实数的符号，算作一次变换（k 是偶数）. 求证：无论作多少次变换，总不能把这 m 个实数全变为正数.

7. 有 p 人持五角币，q 人持一元币($p \geqslant q$)，这 $p+q$ 人排队购买五角一张的戏票，而售票员没带零钱，问有多少排队方式使每持一元币的人购票时售票员都有零钱找补？

8. 有 n 盒火柴摆成一圈，然后作如下调整：若连续 4 盒火柴棍数之和为奇数，则其中每一盒均拿去一根火柴棍，否则每一盒均放入一根火柴棍，而且每连续 4 盒火柴均恰好作一次这样的调整之后，n 盒火柴棍总数不变．求证：n 是 4 的倍数．

9. A，B，C 三人打乒乓球，规定每局比赛后负者退下，让另一人与获胜者继续比赛，最后比赛结果是：A 胜 10 局，B 胜 12 局，C 胜 16 局．问：A，B，C 各打了多少局？(安徽省数学奥林匹克学校招生试题)

10. 将 1990×1990 的方格表中的每一个方格都分别染成黑色或染成白色，使得关于方格表的中心相对称的每个方格所染得的颜色恰好相反，且使每一行和每一列中黑格和白格的数目都相等．(第 24 届全苏数学奥林匹克试题)

11. 已知如下的数表：

$$\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & a_{13} & a_{14} & -a_{15} & -a_{16} \\ a_{21} & -a_{22} & a_{23} & -a_{24} & a_{25} & -a_{26} \\ -a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & -a_{35} & a_{36} \\ -a_{41} & a_{42} & a_{43} & -a_{44} & a_{45} & -a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & -a_{53} & -a_{54} & -a_{55} & -a_{56} \\ -a_{61} & a_{62} & -a_{63} & -a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{pmatrix}$$

且 $a_{ij}>0(i,j=1,2,\cdots,6)$．现将它的任一行任一列所有数都变号，称为一次变换．问能否经过若干次变换，使表中的数全变成正数？

四、完全平方数

与完全平方数有关的问题，是数学竞赛中常见的题型之一. 因此，在这一章里，我们将比较系统地介绍完全平方数及其性质，以及它们在解题中的应用.

1. 完全平方数的性质

一个数如果是另一个整数的完全平方，那么我们就称这个数为完全平方数，也叫做平方数. 例如，

0,1,4,9,16,25,36,49,64,81,100,121,144,169,196,225,256,289,324,361,400,441,484,…

观察这些完全平方数，可以获得对它们的个位数、十位数、数字和等的规律性的认识. 下面我们来研究完全平方数的一些常用性质.

性质 1 完全平方数的末位数只能是 0,1,4,5,6,9.

这是因为，任何整数 a 都可以写作

$$a=10q+r \quad (r=0,1,2,\cdots,9)$$

的形式，于是 $a^2=100q^2+20qr+r^2$. 所以，a^2 的个位数与 r^2 的个位数是相同的，而 $r^2=0,1,4,9,16,25,36,49,64,81$，它的个位数是 0,1,4,5,6,9. 因此，$a^2$ 的个位数只能是 0,1,4,5,6,9.

性质 2 奇数的平方的个位数字为奇数，十位数字为偶数.

证明　奇数必为下列五种形式之一：

$$10a+1,10a+3,10a+5,10a+7,10a+9.$$

分别平方后，得

$$(10a+1)^2=100a^2+20a+1=20a(5a+1)+1,$$

$$(10a+3)^2=100a^2+600a+9=20a(5a+3)+9,$$

$$(10a+5)^2=100a^2+100a+25=20(5a^2+5a+1)+5,$$

$$(10a+7)^2=100a^2+140a+49=20(5a^2+7a+2)+9,$$

$$(10a+9)^2=100a^2+180a+81=20(5a^2+9a+4)+1.$$

综上各种情形可知：奇数的平方，个位数字为奇数 1,5,9；十位数字为偶数.

性质 3　如果完全平方数的十位数字是奇数，则它的个位数字一定是 6；反之，如果完全平方数的个位数字是 6，则它的十位数字一定是奇数.

先证前者，若已知 $m^2=(2k+1)\cdot 10+a$，我们来证明 $a=6$. 因为完全平方数的末位数只能是 0,1,4,5,6,9 之一，故这里的 a 只可能是 0,1,4,5,6,9.

当 $a=0$ 时，m 的个位数为 0，于是可设 $m=10n$，那么 $(2k+1)\cdot 10=(10n)^2=100n^2$，即 $2k+1=10n^2$. 此式左边为奇数，而右边是偶数，矛盾. 故 $a\neq 0$.

当 $a=1$ 时，m 的末位数为 1 或 9，于是可设 $m=10n+1$ 或 $10n+9$. 故 $(2k+1)\cdot 10+1=(10n+1)^2=100n^2+20n+1$，或 $(2k+1)\cdot 10+1=(10n+9)^2=100n^2+(18n+8)\cdot 10+1$，故 $2k+1=10n^2+2n$ 或 $10n^2+18n+8$，也推出矛盾. 故 $a\neq 1$.

同理可证 $a\neq 4,5,9$，故必有 $a=6$.

再证后者. 即已知 $m^2=10k+6$，证明 k 为奇数. 因为 m^2 的个位数为 6，所以 m 的个位数为 4 或 6，于是可设 $m=10n+4$ 或 $10n+6$. 则

$$10k+6=(10n+4)^2=100n^2+(8n+1)\cdot 10+6,$$
或 $$10k+6=(10n+6)^2=100n^2+(12n+3)\cdot 10+6,$$
即 $k=10n^2+8n+1=2(5n^2+4n)+1$,
或 $k=10n^2+12n+3=2(5n^2+6n)+3$.

$\therefore k$ 为奇数.

推论 1 如果一个数的十位数字是奇数,而个位数字不是 6,那么这个数一定不是完全平方数.

推论 2 如果一个完全平方数的个位数不是 6,则它的十位数字是偶数.

证明 设 $n=2k-1$ 是奇数,若记

$$n^2=4k(k-1)+1=10a+b,$$

这里 a,b 是整数,且 $0\leqslant b\leqslant 9$. 由此得

$$10a=4k(k-1)-(b-1).$$

由性质 1 知,b 只能等于 1,5 或 9,所以 $b-1$ 能被 4 整除. 这样 $10a$ 就能被 4 整除,因而 a 必须是偶数.

设 $n=2k$ 是偶数,若记 $n^2=4k^2=10a+b$,这里 a,b 是整数,且 $0\leqslant b\leqslant 9$. 从上式可得

$$10a=4k^2-b.$$

当 $b\neq 6$ 时,由性质 1 知,b 只能等于 0 或 4,所以 b 能被 4 整除,不难得出 a 必须是偶数;当 $b=6$ 时,$4k^2-b$ 不能被 4 整除,这样 a 就必须是奇数.

以上几条性质主要是研究完全平方数的个位数或十位数的特征. 下面我们来研究完全平方数的余数的性质.

性质 4 偶数的平方是 4 的倍数;奇数的平方是 4 的倍数加 1.

这是因为 $(2k+1)^2=4k(k+1)+1$,

$$(2k)^2=4k^2.$$

性质 5 奇数的平方是 $8n+1$ 型，偶数的平方为 $8n$ 或 $8n+4$ 型.

在性质 4 的证明中，由 $k(k+1)$ 一定为偶数可得到 $(2k+1)^2$ 是 $8n+1$ 型的数；由 k^2 为奇数或偶数可得 $(2k)^2$ 为 $8n$ 型或 $8n+4$ 型的数.

性质 6 平方数的形式必为下列两种之一：$3k$，$3k+1$.

因为自然数被 3 除按余数的不同可以分为三类：$3m$，$3m+1$，$3m+2$. 平方后，分别得

$$(3m)^2 = 9m^2 = 3k,$$

$$(3m+1)^2 = 9m^2 + 6m + 1 = 3k + 1,$$

$$(3m+2)^2 = 9m^2 + 12m + 4 = 3k + 1.$$

同理可以得到：

性质 7 不能被 5 整除的数的平方为 $5k\pm1$ 型，能被 5 整除的数的平方为 $5k$ 型.

性质 8 平方数的形式具有下列形式之一：$16m$，$16m+2$，$16m+4$.

除了上面关于个位数，十位数和余数的性质之外，还可研究完全平方数各位数字之和. 例如，256 它的各位数字相加为 $2+5+6=13$，13 叫做 256 的各位数字和. 如果再把 13 的各位数字相加：$1+3=4$，4 也可以叫做 256 的各位数字的和. 下面我们提到的一个数的各位数字之和是指把它的各位数字相加，如果得到的数字之和不是一位数，就把所得的数字再相加，直到加到一位数为止. 我们可以得到下面的命题：

一个数的数字和等于这个数被 9 除的余数.

下面以四位数为例来说明这个命题.

设四位数为 $\overline{abcd}$，则

$$\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d$$

$$= 999a + 99b + 9c + (a + b + c + d)$$
$$= 9(111a + 11b + c) + (a + b + c + d).$$

显然,$a+b+c+d$ 是四位数$\overline{abcd}$被 9 除的余数.

对于 n 位数,也可以仿此法予以证明.

关于完全平方数的数字和有下面的性质:

性质 9 完全平方数的数字之和只能是 0,1,4,7,9.

证明 因为一个整数被 9 除只能是 $9k$,$9k\pm1$,$9k\pm2$,$9k\pm3$,$9k\pm4$ 这几种形式,而

$$(9k)^2 = 9(9k^2 - 1) + 9,$$
$$(9k \pm 1)^2 = 9(9k^2 \pm 2k) + 1,$$
$$(9k \pm 2)^2 = 9(9k^2 \pm 4k) + 4,$$
$$(9k \pm 3)^2 = 9(9k^2 \pm 6k) + 9,$$
$$(9k \pm 4)^2 = 9(9k^2 \pm 8k + 1) + 7.$$

除了以上几条性质以外,还有下列重要性质:

性质 10 a^2b 为完全平方数的充要条件是 b 为完全平方数.

证明 充分性:设 b 为平方数 c^2,则

$$a^2b=a^2c^2=(ac)^2.$$

必要性:若 a^2b 为完全平方数,$a^2b=x^2$,则

$$b=\left(\frac{x}{a}\right)^2.$$

性质 11 如果质数 p 能整除 a,但 p^2 不能整除 a,则 a 不是完全平方数.

证明 由题设可知,a 有质因数 p,但无因数 p^2,可知 a 分解成标准式时,p 的方次为 1,而完全平方数分解成标准式时,各质因数的方次均为偶数,可见 a 不是完全平方数.

性质 12 在两个相邻的整数的平方数之间的所有整数

都不是完全平方数. 即若

$$n^2<k<(n+1)^2,$$

则 k 一定不是完全平方数.

性质 13 一个正整数 n 是完全平方数的充分必要条件是 n 有奇数个因数(包括 1 和 n 本身).

证明 根据唯一性分解定理,设 $n=p_1^{a_1}\cdot p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k}$,其中 $p_1,p_2,\cdots,p_k$ 为不同的素数,$a_1,a_2,\cdots,a_k$ 为正整数.

必要性:因 n 为完全平方数,所以对每一 $i(i=1,2,\cdots,k)$,a_i 为偶数,从而对每一个 $i(i=1,2,\cdots,k)$,a_i+1 为奇数. 又由于 n 有 $(a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_k+1)$ 个不同的因数,但 $(a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_k+1)$ 是 k 个奇数相乘,其结果必为奇数,故 n 有奇数个因数.

充分性:因 n 有奇数个因数,所以 $(a_1+1)\cdot(a_2+1)\cdots(a_k+1)$ 为奇数,从而对每一个 $i(1\leqslant i\leqslant k)$,$a_i+1$ 为奇数,即对每一个 $i(1\leqslant i\leqslant k)$,$a_i$ 为偶数. 故知 n 为完全平方数.

利用以上性质,我们还可以得到判别一个整数不是完全平方数的一些重要结论:

1. 个位数是 2,3,7,8 的整数一定不是完全平方数;

2. 个位数和十位数都是奇数的整数一定不是完全平方数;

3. 个位数是 6,十位数是偶数的整数一定不是完全平方数;

4. 形如 $3n+2$ 型的整数一定不是完全平方数;

5. 形如 $4n+2$ 和 $4n+3$ 型的整数一定不是完全平方数;

6. 形如 $5n\pm2$ 型的整数一定不是完全平方数;

7. 形如 $8n+2,8n+3,8n+5,8n+6,8n+7$ 型的整数一

定不是完全平方数.

8. 数字和是 2,3,5,6,8 的整数一定不是完全平方数.

下面我们来研究连续完全平方数的一个有趣性质.

我们知道:

$$3^2+4^2=5^2,$$

$$10^2+11^2+12^2=13^2+14^2,$$

$$21^2+22^2+23^2+24^2=25^2+26^2+27^2.$$

于是有人会猜想:

在$2k+1$（k 为自然数）个连续完全平方数组成的数列里，前 $k+1$ 个完全平方数之和是否等于后 k 个完全平方数之和.

显然这个结论是否定的.不过我们可以证明使 $2k+1$ 个连续完全平方数组成的数列中,前 $k+1$ 项的和等于后 k 项的和这样的 $2k+1$ 个整数是存在的.

下面先研究 5 个连续完全平方数的情形.

设 5 个连续完全平方数的中间一个为 x^2,则

$$(x-2)^2+(x-1)^2+x^2=(x+1)^2+(x+2)^2,$$

解得 $$x_1=0,\quad x_2=12.$$

这就是说,满足要求的数组有两组:

第 1 组: $(-2)^2+(-1)^2+0^2=1^2+2^2$,

第 2 组: $10^2+11^2+12^2=13^2+14^2$.

其中第一组是平凡解,以后不再研究它.下面主要研究它的非平凡解.

我们用 a^2 来表示 $2k+1$(k 为自然数)个连续完全平方数的中间一个数,于是有

$$(a-k)^2+(a-k+1)^2+\cdots+(a-2)^2+(a-1)^2+a^2$$
$$=(a+1)^2+(a+2)^2+\cdots+(a+k-1)^2+(a+k)^2,$$

解此方程，得 $a_1=0$， $a_2=2k(k+1)$.

$a=0$ 时，得到一组平凡解.

当 $a=2k(k+1)$ 时，以 $[2k(2k+1)]^2$ 为中心的连续 $2k+1$（k 为自然数）个完全平方数一定具有上述性质. 比如，当 $k=3$ 时，$a=2k(k+1)=24$. 从而有

$$21^2+22^2+23^2+24^2=25^2+26^2+27^2.$$

这样完全证明了前面的问题.

现在，我们再来观察下面几组数：

$$\left.\begin{array}{l}1,2,3,4,5,6,7\\ 1+5+6=2+3+7,\\ 1^2+5^2+6^2=2^2+3^2+7^2;\end{array}\right\}\text{I 组}$$

$$\left.\begin{array}{l}2,3,4,5,6,7,8\\ 2+6+7=3+4+8,\\ 2^2+6^2+7^2=3^2+4^2+8^2;\end{array}\right\}\text{II 组}$$

$$\left.\begin{array}{l}3,4,5,6,7,8,9\\ 3+7+8=4+5+9;\\ 3^2+7^2+8^2=4^2+5^2+9^2.\end{array}\right\}\text{III 组}$$

通上以上几组数，发现在以 a_4 为中心数的连续 7 个自然数 $a_1,a_2,\cdots,a_7$ 中去掉中心数 a_4 后，有

$$a_1+a_5+a_6=a_2+a_3+a_7, \quad ①$$

且

$$a_1^2+a_5^2+a_6^2=a_2^2+a_3^2+a_7^2. \quad ②$$

事实上，我们若设 $a_4=x$，以 a_4 为中心数的 7 个连续自然数就依次为 $x-3,x-2,x-1,x,x+1,x+2,x+3$，显然有

$$(x-3)+(x+1)+(x+2)$$
$$=(x-2)+(x-1)+(x+3), \quad ③$$

即对于一切以 a_4 为中心数的连续 7 个自然数 $a_1,a_2,\cdots,a_7$ 永远有③式成立，即有①式成立.

立即可以得出

$$(x-3)^2+(x+1)^2+(x+2)^2$$
$$=(x-2)^2+(x-1)^2+(x+3)^2. \quad ④$$

是一个恒等式. 这就是说，对一切以 a_4 为中心数的连续 7 个自然数 a_1，a_2，$\cdots$，a_7，永远有④式成立，即有②式成立.

于是我们可以得到：

任意 7 个连续自然数 $a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7$，去掉中心数 a_4 以后，必有下列两个等式同时成立：

$$a_1+a_5+a_6=a_2+a_3+a_7,$$
$$a_1^2+a_5^2+a_6^2=a_2^2+a_3^2+a_7^2.$$

例如，当 $a_4=15$ 时，有

$$12+16+17=13+14+18,$$
$$12^2+16^2+17^2=13^2+14^2+18^2.$$

对于连续 9 个自然数 $a_1,a_2,\cdots,a_9$(以 a_5 为中心数)，它们是否也具有上述这个性质呢？我们的回答是肯定的. 例如

$$1+4+7+8=2+3+6+9,$$
$$1^2+4^2+7^2+8^2=2^2+3^2+6^2+9^2,$$
$$2+5+8+9=3+4+7+10,$$
$$2^2+5^2+8^2+9^2=3^2+4^2+7^2+10^2.$$

这个性质的证明完全与前面相同. 关于连续 11 个，甚至 $2k+1$($k\geqslant 6$ 且为自然数)个自然数是否仍具有上述性质？有兴趣的读者可以继续研究.

在本节的最后，我们再考虑完全平方数的另一个有趣的性质.

以 $G(x)$ 表示 x 的末位数字，我们可以发现 $G(1^2+2^2+3^3+\cdots+10^2)=5$. 这就说明，每一个从个位数字是 1 的自然数开始，连续 10 个自然数的平方和的个位数是 5(其实这一规律对自然数的 3 次方，5 次方，6 次方，7 次方，9 次方同样存在). 下面是这一性质的应用.

[**例 1**]　$1^2,2^2,3^2,\cdots,123456789^2$ 的和的个位数字是______.(1990 年全国初中数学联赛题)

解 ∵　$G(1^2+2^2+\cdots+123456789^2)$

$$=G(1^2+2^2+\cdots+1234567890^2),$$

而

$$1234567890=10\times12345679,$$

$$\therefore\quad G(1^2+2^2+\cdots+123456789^2)$$

$$=G(5\times12345679)=5,$$

故应填 5.

[**例 2**]　设 a_n 是 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$ 的个位数字($n=1,2,\cdots$)，试证：$0.a_1a_2a_3\cdots a_n\cdots$ 是有理数.(1984 年全国高中数学联赛题)

分析　只要证明 $0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$ 是循环小数即可.

证明　注意到

$$G(1^2+2^2+\cdots+10^2)=G(11^2+12^2+\cdots+20^2)$$

$$=\cdots=5,$$

$$\therefore\quad a_{20}=G(1^2+2^2+\cdots+20^2)=0.$$

显然 $a_{21}=a_1$，$a_{22}=a_2$，$\cdots$，$a_{20+k}=a_k$，可见，$0.a_1a_2a_3\cdots a_n\cdots$ 是一个每 20 位一次循环的小数，故 $0.a_1a_2a_3\cdots a_n\cdots$ 是有理数.

有兴趣的读者，可以考虑下列问题：

设 a_n 是 $1^3+2^3+\cdots+n^3$ 的个位数字，试证：$0.a_1a_2a_3\cdots a_n\cdots$ 是有理数.

2. 完全平方数与完全平方式

完全平方数与完全平方式是初中数学中两个重要的概念，如果不注意这两个概念的区别与联系，往往造成解题中的不严谨，甚至出现错误. 例如，常见到将"判别式"错用在"完全平方数"上的错误解法和证法.

[**例 1**]　若 a 是有理数，且方程 $x^2-3(a-2)x+a^2-2a+2k=0$ 有有理根，求 k 的值.

解　$\Delta = 9(a-2)^2-4(a^2-2a+2k)$

$= 5a^2-28a+36-8k.$

当 $5a^2-28a+36-8k$ 为完全平方式时，方程有有理根，要使 $5a^2-28a+36-8k$ 为完全平方式，必须

$$\Delta'=(-28)^2-4\times5\times(36-8k)=0, \therefore k=-\frac{2}{5}.$$

这个解法是错误的. 事实上，当 $k=-\frac{2}{5}$ 时，方程即为

$$x^2-3(a-2)x+a^2-2a-\frac{4}{5}=0,$$

判别式 $\Delta=5a^2-28a+\frac{196}{5}=\frac{1}{5}(5a-14)^2$，方程的两根为

$$x=\frac{3(a-2)\pm\sqrt{\frac{1}{5}(5a-14)^2}}{2}$$

$$=\frac{3(a-2)\pm\frac{\sqrt{5}}{5}|5a-14|}{2}.$$

$\because a$ 是有理数，$\sqrt{5}$ 是无理数，

$\therefore$ 当 $a\neq\frac{14}{5}$ 时，x 不是有理数. 即当 $k=-\frac{2}{5}$ 时，方程 $x^2-3(a-2)x+a^2-2a+2k=0$ 没有有理根，因而解答是错误的.

［例 2］ 已知 m 为有理数，要使二次三项式 $x^2-4mx+4x+3m^2-2m+4k$ 能在有理数范围内分解因式，k 应取何值？

解 要使二次三项式在有理数范围内分解因式，其判别式必为完全平方式，即

$$\begin{aligned}\Delta &= 16(m-1)^2-4(3m^2-2m+4k)\\ &= 4(m^2-6m+4-4k)\end{aligned}$$

应为关于 m 的完全平方式，亦即关于 m 的二次三项式 $m^2-6m+4-4k$ 有等根，所以它的判别式 $\Delta'=(-6)^2-4(4-4k)=0$，$\therefore k=-\frac{5}{4}$.

显然，当 $k=-\frac{5}{4}$ 时，结论成立；但反之不然. 如取 $m=2$ 代入已知二次三项式，得 $x^2-4x+8+4k$.

若取 $k=-2$，则有 $x^2-4x=x(x-4)$；

若取 $k=-5$，则有 $x^2-4x-12=(x-6)(x+2)$ 等等.

由此可知，k 不是非取 $-\frac{5}{4}$ 不可，因而，上述解法也是错误的.

［例 3］ 求证：5 个连续自然数的平方和不可能是一个完全平方数.

证明 设五个连续自然数为 $n-2, n-1, n, n+1, n+2$，则 $(n-2)^2+(n-1)^2+n^2+(n+1)^2+(n+2)^2=5n^2+10$. 现证明 $5n^2+10$ 不可能是一个完全平方数.

$\because 5n^2+10$ 为一关于 n 的二次式，若其为一完全平方数，则方程 $5n^2+10=0$ 有两个相等的实数根，于是应有 $\Delta=0$. 但 $\Delta=0^2-4\times5\times10=-200\neq0$. $\therefore 5n^2+10$ 不可能为一完全平方数.

这个证法也是错误的. 如 x^2+144 中，$\Delta=0-4\times144\neq0$，但当 $x=5$ 时，$x^2+144=169$ 是一个完全平方数.

［**例 4**］ 证明方程组 $\begin{cases}x^2+y^2=z^2-t^2,\\ xy=zt\end{cases}$ 在自然数集中没有解.

证明 假设原方程组在自然数集中有解，不妨设 (x_0,y_0,z_0,t_0) 是它的一组自然数解，则

$$\begin{cases}x_0^2+y_0^2=z_0^2-t_0^2, & ①\\ x_0y_0=z_0t_0. & ②\end{cases}$$

由①，②得 $$t_0^4+(x_0^2+y_0^2)t_0^2-x_0^2y_0^2=0,$$

$$\therefore\quad t_0^2=\frac{-(x_0^2+y_0^2)\pm\sqrt{x_0^4+y_0^4+6x_0^2y_0^2}}{2}.$$

$\because x_0,y_0,z_0,t_0$ 都是自然数，$\therefore x_0^4+y_0^4+6y_0^2x_0^2$ 必为完全平方数，从而知 $\Delta=(6y_0^2)^2-4y_0^4=0$，即 $y_0=0$. 这与假设 y_0 是自然数相矛盾，故原方程组无自然数解.

上面的证法也是错误的，只不过不像前几例那么明显.

上面几例的错误解法或证法，其根源是把完全平方式与完全平方数的概念等同起来所致，即将判别式 $\Delta=0$ 错用在"完全平方数"上. 这里特别说明一下，在本节中完全平方数是定义在有理数范围内，例如，36 和 $\frac{49}{121}$ 都是完全平方数. 即如果一个数恰好是某有理数的平方，则这个数就叫做完全平方数.

如果一个二次三项式 $f(x)=ax^2+bx+c$（a,b,c 都是有理数）恰好是某有理式的平方，那么就称这个式子为有理完全平方式. 在实数范围内，$(\sqrt{2}x+1)^2$ 也叫做完全平方式.

定理 1 有理系数二次三项式 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 是有理完全平方式的充要条件是判别式 $\Delta=b^2-4ac=0$，且 a 是某有理数的平方.

证明 必要性：设 $\Delta=0$ 且 a 是某有理数的平方，则 $b^2=4ac$，$\sqrt{a}$ 是有理数，而 $a\neq 0$，$\therefore c=\frac{b^2}{4a}=\left(\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2$，这就是说 $\sqrt{c}$ 也是有理数. $\because b=\pm 2\sqrt{ac}$，$\therefore ax^2+bx+c=(\sqrt{a}x)^2\pm 2\sqrt{ac}x+(\sqrt{c})^2=(\sqrt{a}x\pm\sqrt{c})^2$.

充分性：设 $f(x)=ax^2+bx+c$ 是完全平方式，其中 a，b,c 都是有理数，且 $a\neq 0$. 不妨设 $ax^2+bx+c=(mx+n)^2$，则 $ax^2+bx+c=m^2x^2+2mnx+n^2$，其中 m,n 都是有理数，且 $m\neq 0$. 由多项式恒等的定理得 $a=m^2,b=2mn,c=n^2$，$\therefore b^2=4m^2n^2=4ac$，即 $b^2-4ac=0$，由 $a=m^2$ 知，a 是某有理数的平方，证毕.

类似地，可以证明：

定理 2 实系数二次三项式 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 是完全平方式的充要条件是 $a>0$ 且 $\Delta=0$.

定理 3 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 是非完全平方式的充要条件是 $\Delta=b^2-4ac\neq 0$.

我们知道，式包含数，完全平方式包含完全平方数，有的完全平方式虽然含有字母，但在一定的条件下，也可以成为完全平方数，但二者不能划等号. 如完全平方式 $(ax+b)^2$ 只有在 ax,b 均为有理数时，才能保证它是完全平方数. 于是，我们

有下面的结论：

定理 4 对于一个有理完全平方式 $f(x)=ax^2+bx+c$，当 a 是完全平方数时，x 为任何有理数，$f(x)$ 的值都是完全平方数；当 a 不是完全平方数时，x 为任何有理数，$f(x)$ 的值都不是完全平方数.

但有时，即使一个二次三项式 $f(x)=ax^2+bx+c$ 不是完全平方式，当 x 取某些值时，$f(x)=ax^2+bx+c$ 的值也可以是完全平方数. 例如，x^2+x+6 不是完全平方式，但是 $x=5$ 时，其值是完全平方数 36；$\frac{2x+1}{x^2+x+5}$ 也不是完全平方式，但当 $x=4$ 时，其值是完全平方数 $\frac{9}{25}$. 又如对一切 $n\in N$，$f(n)=3n^2-1$ 恒为非完全平方数.

一般地，可用下述方法把这样的问题转化为求二次不定方程的整数解的问题.

即：若 $f(x)=ax^2+bx+c$，$\Delta=b^2-4ac\neq 0$，设 $ax^2+bx+c=m^2$，则

$$ax^2+bx+c-m^2=0. \quad ①$$

其判别式 $\Delta'=b^2-4ac+4am^2=\Delta+4am^2$，令 $n^2=\Delta+4am^2$，得二次不定方程

$$n^2-4am^2=\Delta. \quad ②$$

解此方程即可确定①有无整数解. 于是有

定理 5 如果方程②有整数解，那么

(i) 是②的整数解所对应的 $f(x)$ 的值是完全平方数；

(ii) 不是②的解的整数所对应的 $f(x)$ 的值不是完全平方数.

证明 设 (n_1, m_1) 是方程②的一组整数解，则 $n_1^2-4am_1^2$

$=\Delta$,即 $m_1^2=\dfrac{n_1^2-\Delta}{4a}$,此时方程①的有理根是

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta+4am_1^2}}{2a}=\frac{-b\pm n_1}{2a}.$$

于是对应的非完全平方式 $f(x)$ 的值 $f(x)=a\left(\dfrac{-b\pm n_1}{2a}\right)^2+b\left(\dfrac{-b\pm n_1}{2a}\right)+c=\dfrac{n_1^2-(b^2-4ac)}{4a}=\dfrac{n_1^2-\Delta}{4a}=m_1^2$ 是一个完全平方数.

如果 (n',m') 不是②的解,即 $\Delta+4am'^2\neq n'^2$,则方程①的根 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta+4am'^2}}{2a}$ 是无理数,从而 $f(x)$ 的值是非完全平方数.

例 1 的解答中,“要使方程有有理根,则 Δ 必为完全平方式”即若 Δ 不是完全平方式,则方程无有理根,言下之意,Δ 不会是完全平方数,这显然是错误的. 即错在将“完全平方式”当成了“完全平方数”,将 $\Delta=0$ 错用在“完全平方数”上.

定理 6 整系数方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 有有理根的充要条件是 b^2-4ac 是一个完全平方数.

证明 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2+4ac}}{2a}\Leftrightarrow 2ax+b$

$=\pm\sqrt{b^2-4ac}$.

若 x 为有理数,则 $2ax+b$ 是有理数,但 b^2-4ac 是整数,只有当它是完全平方数时,$\sqrt{b^2-4ac}$ 才是有理数,故 b^2-4ac 是完全平方数;反之,若 b^2-4ac 是完全平方数时,显然 x 是有理数.

由例 1 知,Δ 的判别式 $\Delta'=0$ 只能保证 Δ 有两个相等的

实根$\left(\text{两根甚至是有理数，本题为}\frac{14}{5}\right)$，但不能保证 Δ 是有理完全平方式，更不能保证 Δ 是完全平方数. 事实上，$\Delta=5a^2-28a+36-8k$，当 $\Delta'=(-28)^2-4\times5\times(36-8k)=0$，即 $k=-\frac{2}{5}$ 时，$\Delta=\left(\sqrt{5}a-\frac{14}{\sqrt{5}}\right)^2$ 是完全平方式，但它不是有理完全平方式. 而当 a 是有理数时，Δ 却是无理数的平方，不是完全平方数，这就导致了原方程的两根是无理数. 所以，在两次应用二次方程(或二次三项式)的判别式时，要注意若 $f(x)=ax^2+bx+c$，当 $f(x)=0$ 有等根时，只能保证二次三项式 ax^2+bx+c 是一个实系数的完全平方式，而不能保证 $f(x)$ 为有理系数的完全平方式. 即 ax^2+bx+c 的判别式，当 x 是有理数时，是某有理数的平方的必要条件而不是充分条件. 例 1 的正确解法是：

$$\begin{aligned}\Delta&=9(a-2)^2-4(a^2-2a+2k)\\&=5a^2-28a+36-8k.\end{aligned}$$

当 $\Delta=5a^2-28a+36-8k$ 为完全平方数时，方程有有理根，令 $5a^2-28a+36-8k=n^2$ (n 为任意数)，则 $k=\frac{1}{8}(5a^2-28a+36-n^2)$. 由 n 的任意性，可知随着 n 的取值相应地可以得到无数多个值.

例 2、例 3 的正确解法略.

［**例 5**］ 已知多项式 $(m+2)x^2+6mx+(4m+1)$ 在有理数范围内是完全平方式，求 m 的值.

解 这里 $\Delta=(6m)^2-4(m+2)(4m+1)=0$，即 $5m^2-9m-2=0$，$\therefore m_1=2, m_2=-\frac{1}{5}$. 由此可得 $a_1=m_1+2=4$ 是有理数的平方，$a_2=m_2+2=-\frac{1}{5}+2=\frac{9}{5}$ 不是有理数的平方. $\therefore$

$m=2$.

[**例 6**] 已知 $p>0,q>0,r>0$,并且$\frac{1}{p},\frac{1}{q},\frac{1}{r}$成等差数列,求证:多项式 $prx^2+4qrx+2(p+r)q$ 是完全平方式.

证明 $\because$ $\frac{1}{p},\frac{1}{q},\frac{1}{r}$成等差数列,

$$\therefore \quad \frac{2}{q}=\frac{1}{p}+\frac{1}{r}\Rightarrow 2pr=pq+rq,$$

$$\therefore \quad \Delta=(4pr)^2-4\cdot pr\cdot 2(p+r)q$$
$$=8pr(2pr-pq-rq)=0.$$

又$\because pr>0$,$\therefore$多项式

$$prx^2+4prx+2(p+r)q$$

是完全平方式.

[**例 7**] 设 m 为整数,且 $4<m<40$,方程

$$x^2-2(2m-3)x+4m^2-14m+8=0$$

有两个整数根,求 m 的值及方程的根.(1984 年广州、武汉、福州三市初中数学联赛题)

解 由原方程得

$$x=2m-3\pm\sqrt{(2m-3)^2-(4m^2-14m+8)}$$
$$=2m-3\pm\sqrt{2m+1}.$$

$\because$ x 是整数,则 $2m+1$ 必是完全平方数,又 m 为整数,

$\therefore$ $2m+1$必为奇数的平方.

$\because$ $4<m<40$, $\therefore$ $9<2m+1<81$,

即 $$3^2<2m+1<9^2.$$

$\therefore$ $2m+1=5^2$ 或 7^2.

当 $2m+1=5^2$ 即 $m=12$ 时,方程为 $x^2-42x+416=0$,从而方程的解是 $x_1=26,x_2=16$;

当 $2m+1=7^2$ 即 $m=24$ 时,方程为 $x^2-90x+1976=0$,

得 $x_1=52, x_2=38$.

[**例 8**] 当 k 为何有理数时，方程 $2x^2+2kx-(k+1)=0$ 有有理根？

解 $\Delta_1=(2k)^2+8(k+1)=4(k^2+2k+2)$.

令 $k^2+2k+2=m^2$（显然 $m\neq0$）. 由于 k 为有理数，故关于 k 的一元二次方程 $k^2+2k+2-m^2=0$ 有有理数根.

$$\Delta_2=4-4(2-m^2)=4(m-1)(m+1).$$

令 $4(m-1)(m+1)=p^2$.

(1) 当 $p=0$ 时，$m=1$ 或 $m=-1$，代入 $k^2+2k+2-m=0$，解得 $k=-1$.

(2) 当 $p\neq0$ 时，Δ_2 为完全平方数. 由此令 $m-1=n^2(m+1)$（显然 $n\neq\pm1$），解得 $m=\frac{1+n^2}{1-n^2}$，代入 $k^2+2k+2-m^2=0$，解得

$$k=-1\pm\frac{2n}{1-n^2}.$$

注意到，当 $n=0$ 时，$k=-1$，所以，当 $k=-1\pm\frac{2n}{1-n^2}$（n 为有理数，且 $n\neq\pm1$）时，方程 $2x^2+2kx-(k+1)=0$ 的根为有理数. 并且有：当 $k=-1+\frac{2n}{1-n^2}$ 时，

$$x_1=\frac{1}{1+n},\quad x_2=\frac{-n}{1-n}. \qquad ①$$

当 $k=-1-\frac{2n}{1-n^2}$ 时，

$$x_1=\frac{1}{1-n},\quad x_2=\frac{n}{1+n}. \qquad ②$$

任给不等于 ±1 的有理数 n，都可代入①，②求出 k 及方程的根，读者不妨一试.

［例 9］ 求证：对任何 $k\in N$，方程 $x^2+2kx-\frac{1}{4}(k^2+1)=0$ 无有理数根.

证明 由求根公式得

$$x=\frac{1}{2}(-2k\pm\sqrt{3k^2-1}).$$

只须证对任何 $k\in N$，非完全平方式 $3k^2-1$ 恒为非完全平方数.

设 $3k^2-1=m^2(k,m\in N)$，则

$$m^2-3k^2=-1. \qquad ①$$

可知 m 和 k 只能一奇一偶. 又由①得

$$m^2+1=3k^2. \qquad ②$$

当 $k=2k'(k'\in N)$，$3k^2=12k'^2$ 是 4 的倍数，此时 $m=2m'+1(m\in N)$，得

$$m^2+1=2(2m'+1)^2+1=4m'(m'+1)+2,$$

不是 4 的倍数，于是②式不成立.

当 $k=2k'+1$ 时，$3k^2=3(2k'+1)^2=12k'(k'+1)+3$ 被 4 除余 3，此时 $m=2m'$，$m^2+1=4m'^2+1$ 被 4 除余 1，②式也不成立.

∴方程①无整数解. 对任何 $k\in N$，$3k^2-1$ 恒为非完全平方数，从而原方程的根不可能是有理数.

现在我们来研究在什么条件下，二元二次六项式 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f(ac\neq0)$ 是完全平方数.

和二次三项式相类似，我们可以得到下面的结论：

定理 7 在有理数范围内，如果二次多项式 $f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f$（$a,c$ 不同时等于零）是完全平方式，那么 $\Delta_{xy}=0,\Delta_x=0,\lambda=0$，且 a（或 c）是有理数的平方；反

之.在有理数范围内，如果 $\Delta_{xy}=0,\Delta_x=0,\lambda=0$，且 a（或 c）是有理数的平方，那么 $f(x,y)$ 是完全平方式，这里 $\Delta_{xy}=b^2-4ac,\Delta_x=d^2-4af,\lambda=bd-2ae$.

证明 $\because a,c$ 不同时等于零，不妨假定 $a\neq 0$，那么

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f$$
$$=ax^2+(by+d)x+cy^2+ey+f.$$

将此多项式看作是 x 的二次三项式，如果它是一个完全平方式，那么

$$\Delta=(by+d)^2-4a(cy^2+ey+f)=0,$$

并且 a 是有理数的平方，即

$$(b^2-4ac)y^2+2(bd-2ae)y+(d^2-4af)=0.$$

因为当一个多项式恒等于零时，它的各项系数都等于零，所以

$$b^2-4ac=0,bd-2ae=0,d^2-4af=0.$$

即 $\Delta_{xy}=0,\Delta_x=0,\lambda=0$，且 a（或 c）是有理数的平方.

反之，如果 $\Delta_{xy}=0,\Delta_x=0,\lambda=0$，且 a（或 c）是有理数的平方，那么

$$b^2-4ac=0,d^2-4af=0,bd-2ae=0,$$

$$\therefore\quad (b^2-4ac)y^2+2(bd-2ae)y+(d^2-4af)=0,$$

即
$$(by+d)^2-4a(cy^2+ey+f)=0.$$

由此可得

$$\Delta=(by+d)^2-4a(cy^2+ey+f)=0.$$

$\because a$ 是有理数的平方，

$\therefore ax^2+(by+d)x+cy^2+ey+f$ 是完全平方式. 这就是说，多项式 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f$ 是完全平方式.

易知，如果把上面这个结论中的"a（或 c）是有理数的平方"换成"$a>0$（或 $c>0$）"，就可以得到如下的结论：

定理 8　在实数范围内，如果二元二次多项式 $f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f$（$a,c$ 不同时等于零）是完全平方式，那么 $\Delta_{xy}=0$，$\Delta_x=0$，$\lambda=0$，且 $a>0$（或 $c>0$）；反之，在实数范围内，如果 $\Delta_{xy}=0$，$\Delta_x=0$，$\lambda=0$，且 $a>0$（或 $c>0$），那么二元二次多项式 $f(x,y)$ 是完全平方式.

利用与上面同样的方法可以证明，三元二次齐次式 $f(x,y,z)=ax^2+bxy+cy^2+dxz+eyz+fz^2$（$a,c,f$ 不同时等于零）也有相同的结论.

［**例 10**］　判别二元二次多项式 $f(x,y)=9x^2-6xy+y^2-12x+4y+4$ 在有理数范围内是不是完全平方式.

解　在这里 $a=9$，$b=-6$，$c=1$，$d=-12$，$e=4$，$f=4$，且

$$\Delta_{xy}=(-6)^2-4\times9\times1=0,$$

$$\Delta_x=(-12)^2-4\times9\times4=0,$$

$$\lambda=(-6)\times(-12)-2\times9\times4=0,$$

$$a=9=3^2,$$

所以，在有理数范围内，$9x^2-6xy+y^2-12x+4y+4$ 是完全平方式.

［**例 11**］　已知多项式

$$f(x)=4x^4-4px^3+4qx^2+2p(m+1)x+(m+1)^2\quad(p\neq0).$$

求证：(1)如果 $f(x)$ 的系数满足 $p^2-4q-4(m+1)=0$，那么 $f(x)$ 恰好是一个二次三项式的平方；

(2)如果 $f(x)$ 和 $F(x)=(2x^2+ax+b)^2$ 表示同一个多项式，那么 $p^2-4q-4(m+1)=0$.

证明　(1) 由 $p^2-4q-4(m+1)=0$，可以得到

$$m+1=\frac{p^2-4q}{4}.$$

把它代入已知的多项式，得

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 4x^4 - 4px^3 + 4qx^2 + 2p(m+1)x + (m+1)^2 \\
&= 4x^4 - 4px^3 + 4qx^2 + 2p \cdot \frac{p^2-4q}{4} \cdot x + \left(\frac{p^2-4q}{4}\right)^2 \\
&= 4x^4 - 4px^3 + p^2x^2 - (p^2-4q)x^2 \\
&\quad + 2px \cdot \frac{p^2-4q}{4} + \left(\frac{p^2-4q}{4}\right)^2 \\
&= (2x^2-px)^2 - 2(2x^2-px) \cdot \frac{p^2-4q}{4} + \left(\frac{p^2-4q}{4}\right)^2 \\
&= \left(2x^2 - px - \frac{p^2-4q}{4}\right)^2,
\end{aligned}
$$

即 $f(x)$是一个二次三项式的平方.

(2) 由

$$
\begin{aligned}
&4x^4 - 4px^3 + 4qx^2 + 2p(m+1)x + (m+1)^2 \\
&\quad = (2x^2+ax+b)^2 \\
&\quad = 4x^4 + 4ax^3 + (a^2+4b)x^2 + 2abx + b^2,
\end{aligned}
$$

$$\therefore \quad -4p=4a, \qquad ①$$

$$4q=a^2+4b, \qquad ②$$

$$2p(m+1)=2ab, \qquad ③$$

$$(m+1)^2=b^2. \qquad ④$$

由①,得 $a=-p$,代入②得

$$b=\frac{4q-p^2}{4}.$$

把 a,b 的值代入③,得

$$2p(m+1)=2(-p) \cdot \frac{4q-p^2}{4},$$

即
$$p[p^2-4q-4(m+1)]=0.$$

$$\because \quad p \neq 0, \quad \therefore \quad p^2-4q-4(m+1)=0.$$

习 题 四

1. 判别下列各式是不是完全平方式，并且指出在什么数的范围内是完全平方式：

(1) $2x^4+20x^2+50$；

(2) $4x^2-20xy+25y^2+4x-10y+1$；

(3) $x^2-xy-2y^2-x+11y-12$.

2. m 为何值时，$x^2+2x-2+m(x^2-2x+1)$是完全平方式？

3. 已知 $ax^2+2bxy+cy^2-k(x^2+y^2)$是完全平方式，求 k 的值.

4. 试确定 k 为何实数时，二次三项式$(2k-1)x^2+4kx+2(3k-1)$为完全平方式.

5. 如果$(x+a)(x+b)+(x+b)(x+c)+(x+c)(x+a)$是完全平方式，求证：$a=b=c$.

6. 已知 x^2+px+q 是一个完全平方式，且 $q<1$，求证：$\left(1-q+\frac{p^2}{2}\right)x^2+p(1+q)x+q(q+1)$也是完全平方式.

7. 求证：多项式 $x^4+bx^3+cx^2+dx+e$ 是完全平方式的充要条件是 $c=\left(\frac{b}{2}\right)^2+\frac{2d}{b}$，$e=\frac{d^2}{b^2}$.

8. k 为什么数值时，多项式 $kx^2-2xy+3y^2+3x-5y+2$ 能分解成两个一次因式的乘积（在实数范围内）？并分解之.

9. 试证：不论 k 取什么实数，多项式 $x^2+2kxy+8y^2-3x+6y+2$ 都不能分解成两个一次因式的乘积.

10. 已知多项式 $x^4+6x^3+7x^2+ax+b$ 是完全平方式，求 a 和 b.

11. 已知多项式 $x^4+Ax^3+Bx^2-8x+4$ 是完全平方式，求 A 和 B.

12. 如果多项式 $9x^4+12x^3-26x^2-20x+25$ 是多项式 Ax^2+Bx+C 的完全平方，求 A，B 和 C.

13. 如果多项式$(b-c)x^2+(c-a)x-(c-b)$是一个完全平方式，那么 $a=2b-c$ 或 $a=3c-2b$.

14. 当有理数 a 为何值时，方程$(1+a)x^2-(2-3a)x+(1+5a)=0$的二根为有理数？

15. k 为何值时，$x^2-kx+(k+8)=0$ 有有理根，且一根大于 2，另一根小于 2？

16. 设 a 为有理数，且方程

$$2x^2+(a+1)x-(3a^2-4a+m)=0$$

的根也为有理数，求 m 的值.

17. 当 k 为何整数时，方程 $x^2+(k+1)x-k=0$ 有有理根？

18. 甲、乙二人同时解无理方程 $\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}=7$，抄题时甲错抄成：$\sqrt{x-a}+\sqrt{x+b}=7$，结果解得其一根为 12；乙错抄成 $\sqrt{x+a}+\sqrt{x+d}=7$，结果解得其一根为 13. 已知二人除抄错题之外，解题过程都是正确的，又 a,b,d 都是整数，试求 a,b 之值.（1986 年广州、武汉、福州、重庆四市初中数学联赛题）

19. 试求出所有这样的正整数 a，使二次方程 $ax^2+2(2a-1)x+4(a-3)=0$ 至少有一个整数根.（第 3 届"祖冲之杯"初中数学邀请赛题）

20. 求使 x 的方程 $(a+1)x^2-(a^2+1)x+2a^3-6=0$ 有整数根的所有的整数 a.（1991 年上海市初中数学竞赛题）

3. 与完全平方数有关的问题

［**例 1**］ 一个自然数减去 45 后是一个完全平方数，这个自然数加上 44，仍是一个完全平方数，试求这个自然数.（1981 年北京市初三数学竞赛题）

解 设这个自然数为 x，依题意可得

$$\begin{cases} x-45=m^2, & ① \\ x+44=n^2, & ② \end{cases}$$

其中 m,n 为自然数. 由②－①可得

$$n^2-m^2=89. \quad ③$$

易知 $n^2=x+44>x-45=m^2$，$\therefore n>m$. 由③式，89 为两个自

然数之积，但 89 为质数，它的正因数只能是 1 与 89，于是 $n-m=1$，$n+m=89$. 解之，得 $n=45$. 代入②得 $x=45^2-44=1981$. 故所求的自然数是 1981.

［**例 2**］ 求证：四个连续的整数的积加上 1，等于一个奇数的平方.（1954 年基辅数学竞赛题）

分析 设四个连续的整数为 n，$n+1$，$n+2$，$n+3$，其中 n 为整数. 欲证 $n(n+1)(n+2)(n+3)+1$ 是一奇数的平方，只需将它通过因式分解而变成一个奇数的平方即可.

证明 设这四个整数之积加上 1 为 m，则

$$\begin{aligned} m &= n(n+1)(n+2)(n+3)+1 \\ &= [n(n+3)][(n+1)(n+2)]+1 \\ &= (n^2+3n)(n^2+3n+2)+1 \\ &= (n^2+3n)^2+2(n^2+3n)+1 \\ &= (n^2+3n+1)^2 = [n(n+1)+(2n+1)]^2. \end{aligned}$$

而 $n(n+1)$ 是两个连续整数的积，所以是偶数；又因为 $2n+1$ 是奇数，因而 $n(n+1)+2n+1$ 是奇数. 这就证明了 m 是一个奇数的平方.

一般地，要证明一个式子是完全平方数，只需对它进行因式分解，化成一个整式的完全平方；若因式分解后是一分式的平方，则再验证它的分子能否被分母整除即可.

［**例 3**］ 求证：11，111，1111，…，$\underbrace{11\cdots1}_{n个1}$，…这串数中没有完全平方数.（1972 年基辅数学竞赛题）

分析 形如 $\underbrace{11\cdots1}_{n个1}$ 的数若是完全平方数，必是末位为 1 或 9 的数平方所得，即

$$\underbrace{11\cdots1}_{n个1}=(10a+1)^2,$$

或
$$\underbrace{11\cdots1}_{n个1}=(10a+9)^2.$$

在两端同时减去 1 之后即可推出矛盾.

证明　若$\underbrace{11\cdots1}_{n个1}=(10a+1)^2=100a^2+20a+1$,则

$$\underbrace{11\cdots1}_{n-1个1}0=100a^2+20a,$$

$$\underbrace{11\cdots1}_{n-1个1}=10a^2+2a.$$

因为左端为奇数,右端为偶数,所以左右两端不相等.

若$\underbrace{11\cdots1}_{n个1}=(10a+9)^2=100a^2+180a+81$,则

$$\underbrace{11\cdots1}_{n-1个1}0=100a^2+180a+80,$$

$$\underbrace{11\cdots1}_{n-1个1}=10a^2+18a+8.$$

因为左端为奇数,右端为偶数,所以左右两端不相等.

综上所述,$\underbrace{11\cdots1}_{n个1}$ 不可能是完全平方数.

另证　由$\underbrace{11\cdots1}_{n个1}$为奇数知，若它为完全平方数，则只能是奇数的平方．但已证过：奇数的平方其十位数字必是偶数，而$\underbrace{11\cdots1}_{n个1}$十位上的数字为 1，所以$\underbrace{11\cdots1}_{n个1}$不是完全平方数.

[例 4]　试证数列 49,4489,444889,…,$\underbrace{44\cdots4}_{n个4}\underbrace{88\cdots8}_{n-1个8}9$,…的每一项都是完全平方数.

证明　∵ $49=7^2$,$4489=67^2$.

$$\underbrace{44\cdots4}_{n个4}\underbrace{88\cdots8}_{n-1个8}9=\underbrace{44\cdots4}_{n个4}\underbrace{88\cdots8}_{n个8}+1$$

$$= \underbrace{44\cdots4}_{n个}\underbrace{00\cdots0}_{n个} + \underbrace{88\cdots8}_{n个} + 1$$

$$= 4 \times \underbrace{11\cdots1}_{n个} \times 10^n + 8 \times \underbrace{11\cdots1}_{n个} + 1$$

$$= 4 \times \underbrace{11\cdots1}_{n个} \times (9 \times \underbrace{11\cdots1}_{n个} + 1) + 8 \times \underbrace{11\cdots1}_{n个} + 1$$

$$= 36 \times (\underbrace{11\cdots1}_{n个})^2 + 12 \times \underbrace{11\cdots1}_{n个} + 1$$

$$= (6 \times \underbrace{11\cdots1}_{n个} + 1)^2.$$

即$\underbrace{44\cdots4}_{n个4}\underbrace{88\cdots89}_{n-1个8}$为完全平方数，所以数列 49，4489，444889，…，$\underbrace{44\cdots4}_{n个4}\underbrace{88\cdots89}_{n-1个8}$…中的每一项都是完全平方数.

［**例 5**］ 求证：对于任意自然数 n，$n^4+2n^3+2n^2+2n+1$ 不是完全平方数.(1970 年基辅数学竞赛题)

分析 欲证此数不是完全平方数，若考虑其末位数字，显然是很困难的. 根据这个数的特点，很容易想到利用性质 12，即证明此数在相邻的两个完全平方数之间.

证明 ∵ $n^4+2n^3+2n^2+2n+1$

$$>n^4+2n^3+n^2=(n^2+n)^2.$$

又

$$\because \quad n^4+2n^3+2n^2+2n+1$$
$$<n^4+2n^3+3n^2+2n+1$$
$$=n^4+n^2+1+2n^3+2n^2+2n$$
$$=(n^2+n+1)^2,$$

$$\therefore \quad (n^2+n)^2<n^4+2n^3+2n^2+2n+1<(n^2+n+1)^2.$$

而$(n^2+n)^2$与$(n^2+n+1)^2$是两个相邻数的完全平方数，它们之间一定没有完全平方数，因而对任意自然数 n，数 n^4+2n^3

$+2n^2+2n+1$ 不可能是完全平方数.

［**例 6**］ 用 300 个 2 和若干个 0 组成的整数有没有可能是完全平方数？

分析 由于用 300 个 2 和若干个 0 组成的整数，其位数至少是 301，各数位上都可能是 2 和 0（首位只能是 2），逐个讨论太繁. 作为约数，考虑各数位上的数字和，知数字和为 600. 故组成的数有 3 这个质因子，但 600 并非 $3^2=9$ 的倍数（完全平方数有素因子必含这个素因子的偶次方）.

解 设由 300 个 2 和若干个 0 组成的数为 A，则其数字和为 600.

$$\because \quad 3|600, \quad \therefore \quad 3|A.$$

但

$$9\nmid 600, \therefore \quad 9\nmid A.$$

即 A 中只有 3 这个因数，而无 $3^2=9$ 这个因数，所以 A 不是完全平方数. 因此，由 300 个 2 和若干个 0 组成的数不可能是完全平方数.

［**例 7**］ 设 n 为自然数，求证：$n^2+5n+13$ 只有在 $n=4$ 时才是完全平方数.

证明 $\because \quad (n+2)^2=n^2+4n+4<n^2+5n+13,$

$$(n+4)^2=n^2+8n+16>n^2+5n+13,$$

$$\therefore \quad (n+2)^2<n^2+5n+13<(n+4)^2.$$

为了使数 $n^2+5n+13$ 成为完全平方数，必须使

$$n^2+5n+13=(n+3)^2,$$

即

$$n^2+5n+13=n^2+6n+9,$$

$$\therefore \quad n=4.$$

反之，当 $n=4$ 时，$n^2+5n+13=49=7^2$ 确实是完全平方数. 因此，当 n 为自然数时，数 $n^2+5n+13$ 只有在 $n=4$ 时，才

是完全平方数.

[例 8] 某整数的平方等于四个连续奇数的积,这种整数共有几个?为什么?

解 设该整数为 x,四个连续奇数为 $2k-3,2k-1,2k+1,2k+3$,则有

$$x^2=(2k-3)(2k-1)(2k+1)(2k+3)$$
$$=(4k^2-1)(4k^2-9)$$
$$=(4k^2)^2-10(4k^2)+9.$$

当 $k=0$ 时,$x^2=9$,所以 $x=\pm3$;

当 $|k|=1$ 时,$x^2=-15<0$;

当 $|k|\geqslant2$ 时,

$$(4k^2-6)^2=(4k^2)^2-48k^2+36$$
$$=(4k^2)^2-10(4k^2)^2+9-8k^2+27$$
$$=x^2-(8k^2-27)<x^2,$$
$$(4k^2-5)^2=(4k^2)^2-10(4k^2)^2+25$$
$$=x^2+16>x^2,$$
$$\therefore\quad(4k^2-6)^2<x^2<(4k^2-5)^2.$$

而 $(4k^2-6)^2$ 与 $(4k^2-5)^2$ 是两个相邻整数的完全平方数,故 x^2 不存在.因此,满足题意的整数只有两个,即数 ±3.

[例 9] 试求出一个四位数,它是一个完全平方数,并且它的前两位数字相同,后两位数字也相同.(第 2 届莫斯科数学奥林匹克试题)

解 设这个四位数为 $\overline{aabb}$,因为

$$\overline{aabb}=a\times10^3+a\times10^2+b\times10+b$$
$$=(a\times10^2+b)\times11=\overline{aob}\times11,$$

所以,欲使它是完全平方数,三位数 $\overline{a0b}$ 必须含素因数 11.而 $11|\overline{a0b}$ 当且仅当 $11|(a+b)$. 注意到 a,b 是 0,1,2,…各数码

之一($a\neq 0$),故共有(2,9),(3,8),(4,7),…,(9,2)等 8 组可能值.直接验算,可知所求的四位数为 $7744=88^2$.

[例 10] 一个两位数 N,在它的左边添上适当的两个数码变成四位数时恰是原数 N 的平方,试求所有这样的两位数.

解 设添上的两个数码为 a,b,记 $k=\overline{ab}$.按题意有 $k\times 100+N=N^2$,即 $N(N-1)=2^2 5^2 k$.欲使 N^2 是一个四位数,必须 $N\geqslant 32$.又 N 与 $N-1$ 互素,所以由 $2^2 5^2 \mid N(N-1)$ 可得:或者 $2^2 \mid N, 5^2 \mid (N-1)$;或者 $5^2 \mid N, 2^2 \mid (N-1)$.

当 $5^2 \mid N, 2^2 \mid (N-1)$ 时,N 必为奇数.这就是说 N 必是大于 32 且为 $5^2=25$ 的倍数的奇两位数,这样的两位数 N 可能取的值只有 75,但此时,$2^2 \nmid 74$,所以,此时无解.

同理,当 $2^2 \mid N, 5^2 \mid (N-1)$ 时,这时 $N-1$ 可能取的值只有 75,此时 $2^2 \mid 76$,所以 $N=76$.

这就解得只有 76 这一个两位数满足所说性质:$5776=76^2$.

[例 11] 求具有下列性质的最大的平方数:在抹去它的个位数字和十位数字后仍为完全平方数(被抹去的两位数不全为 0).

解 设把 n^2 中后两位数字抹去后得 k^2,且 n^2 不是以 00 结尾的,所以有

$$0<n^2-100k^2<100. \quad ①$$

由 $0<n^2-100k^2$ 得 $n>10k$,即 $n\geqslant 10k+1$,由此,$k\leqslant 4$.当 $k=4$ 时,因为 $42^2-100\times 4^2>100$,即 $n=42$ 不满足①式,故欲①式右边不等式成立只有 $n=41$.直接验证知 $n^2=41^2=1681$ 是满足所述性质的数.

从上述的证明可见,由于 k 要满足①式,除 41^2 外已无更

大的数满足所述性质.

［例 12］ 若 a,b,c,d,e,f,p,q 是阿拉伯数字，且 $b>c>d>a$. 四位数$\overline{cdab}$与$\overline{abcd}$之差是一个形如$\overline{pqef}$的四位数，若$\overline{ef}$是一个完全平方数，$\overline{pq}$不能被 5 整除，试求四位数$\overline{abcd}$，并简述理由.(1983 年北京市初中数学竞赛题)

解 ∵ $$\begin{aligned}\overline{pqef} &= \overline{cdab} - \overline{abcd}\\ &= (\overline{cd}\times 10^2 + \overline{ab}) - (\overline{ab}\times 10^2 + \overline{cd})\\ &= 99(\overline{cd} - \overline{ab}),\end{aligned}$$

即 $$\overline{pq}\times 100 + \overline{ef} = 99(\overline{cd} - \overline{ab}),$$

$$\overline{pq}\times 99 + (\overline{pq} + \overline{ef}) = 99(\overline{cd} - \overline{ab}),$$

$$\therefore\quad 99\,|\,(\overline{pq}+\overline{ef}).$$

但$\overline{ef}\leqslant 81$，$0<\overline{pq}+\overline{ef}<200$，

$$\therefore\quad \overline{pq}+\overline{ef}=99.$$

由于$\overline{pq}$不是 5 的倍数，所以 q 不是 0，5. 因此 f 不是 9，4. 由

$$\overline{cdab}-\overline{abcd}=\overline{pqef},\ b>c>d,$$

∴个位数字 $f=b-d\geqslant 2$.

因此，完全平方数$\overline{ef}$的末位数字 f 只能取 5 或 6. 注意减法算式

$$\begin{array}{r} c\ d\ a\ b\\ -)\ a\ b\ c\ d\\ \hline p\ q\ e\ f\end{array}$$

中，$b>c>d>a$，知 $c\leqslant 8$，$a\geqslant 1$，所以 $c-a\leqslant 7$. 但在百位上 $d<b$，作减法时要向千位借 1，所以

$$1\leqslant p=(c-1)-a<7-1=6.$$

但由$\overline{pq}+\overline{ef}=99$ 知 $e\geqslant 9-p=9-6=3$，因此得知两位的平方数$\overline{ef}=36$，即$\overline{pqef}=6336$.

这时，在$\overline{cdab}-\overline{abcd}=6336$的算式中，显然有$b-d=6$，$c-a=7$，根据$b>c>d>a$，只能有$c=8$，$a=1$，$b=9$，$d=3$.

所以，所求的数$\overline{abcd}=1983$.

［例 13］ 试求能使$22n+5$为完全平方数的一切自然数n，并给出这种n的一般表示式.

解 设$22n+5=N^2$，其中N是自然数. 于是

$$N^2-16=11(2n-1),$$

由此可得：或者$N-4$或者$N+4$是11的倍数. 但由于N是奇数，所以$N=(2k-1)\times 11\pm 4$，即$N=22k-7$或$N=22k-15$($k=1,2,\cdots$). 由此解得

$$n=\frac{1}{22}(N^2-5)=\frac{1}{22}[(22k-7)^2-5]$$
$$=22k^2-14k+2,\quad (k=1,2,\cdots)$$

或
$$n=\frac{1}{22}(N^2-5)=\frac{1}{22}[(22k-15)^2-5]$$
$$=22k^2-30k+10.\quad (k=1,2,\cdots)$$

［例 14］ 设n和d都是自然数，且$2n^2$能被d整除. 求证：n^2+d不是完全平方数.

证明 设$2n^2=md$，其中m是整数.

若$n^2+d=x^2$，x为整数，则

$$m^2n^2+m^2d=m^2x^2,$$
$$m^2n^2+2mn^2=(mx)^2,$$
$$n^2(m^2+2m)=(mx)^2,$$

由于n^2，$(mx)^2$都是完全平方数，则m^2+2m也应是完全平方数. 然而

$$m^2<m^2+2m<m^2+2m+1=(m+1)^2,$$

m^2+2m是介于m^2和$(m+1)^2$这两个相邻平方数之间的数，

所以不是完全平方数.这就证明了 n^2+d 不是完全平方数.

[**例 15**] 求方程 $x^2+2y^2=1979$ 的正整数解.

解 首先证明若方程有正整数解,则 x 和 y 必都为奇数.

x 为奇数是显然的.若 y 为偶数,由于 x^2 为 $4k+1$ 型的数,故 x^2+2y^2 为 $4k+1$ 型的数,而 1979 为 $4k+3$ 型的数,则 x^2+2y^2 为 $4k+1$ 型的数,而 1979 为 $4k+3$ 型的数,这是不可能的,从而 y 也为奇数.

由于 x^2 的个位数是 1,5,9;$2y^2$ 的个位数是 0,2,8,由于 x^2+2y^2 的个位数是 9,可得 x^2 的个位数只能为 1,9;y^2 的个位数只能是 5,3,7(考虑到 y 是奇数).

因为 $2y^2\leqslant 1979$,则 $y^2\leqslant\frac{1979}{2}$,$y\leqslant 31$.而不大于 31 的个位是 5,3,7 的数只有 3,5,7,13,15,17,23,25,27.经检验,知 $x=27$,$y=25$ 是原方程的正整数解.

[**例 16**] 若 $24a^2+1=b^2$,求证:a 和 b 中有且仅有一个能被 5 整除.

证明 本题相当于证明 a 和 b 不可能都被 5 整除,也不可能都不被 5 整除.

由于 $b^2-24a^2=1$,显然 a 和 b 不可能都被 5 整除.下面证明 a 和 b 不可能都不被 5 整除.

若 a 和 b 都不能被 5 整除,则 a^2 和 b^2 为 $5k\pm 1$ 型.

若 a^2 和 b^2 之一为 $5k+1$ 型,另一为 $5k-1$ 型,则 a^2+b^2 能被 5 整除.由 $24a^2+1=b^2$,得 $25a^2+1=a^2+b^2$.然而,$25a^2+1$ 不能被 5 整除,所以 a^2 和 b^2 不可能一个为 $5k+1$ 型,另一个为 $5k-1$ 型.

若 a^2 和 b^2 同为 $5k+1$ 型或同为 $5k-1$ 型,则 a^2-b^2 能被 5 整除,而 $a^2-b^2=-(23a^2+1)$.

考察 $23a^2+1$ 的个位数：

a^2 的个位数	0	1	4	5	6	9
$23a^2$ 的个位数	0	3	2	5	8	7
$23a^2+1$ 的个位数	1	4	3	6	9	8

由上表可看出 $23a^2+1$ 的个位数没有 0 或 5，因此，$23a^2+1$ 不能被 5 整除，从而 a^2-b^2 不能被 5 整除. 所以，a^2 和 b^2 不可能同为 $5k+1$ 或同为 $5k-1$ 型.

于是 a 和 b 有一个且仅有一个能被 5 整除.

［**例 17**］ 求所有这样的自然数 n，使得 $2^8+2^{11}+2^n$ 是一个自然数的完全平方.（第 6 届全俄中学生数学竞赛题）

解 我们分三种情况进行讨论：

(i) 当 $n\leqslant 8$ 时，

$$N=2^8+2^{11}+2^n=2^n(2^{8-n}+2^{11-n}+1).$$

为使 N 是完全平方数，必须 N 是偶数. 由于 $2^{8-n}+2^{11-n}+1$ 是奇数，则 2^n 也必须为完全平方数，即 n 为偶数，$n=2,4,6,8$. 一一验证，可知 N 都不是平方数.

(ii) 当 $n=9$ 时，

$$N=2^8+2^{11}+2^9=2^8\times 11$$

不是平方数.

(iii) 当 $n\geqslant 10$ 时，

$$N=2^8(1+2^3+2^{n-8})=2^8(9+2^{n-8}).$$

为使 N 是平方数，必须使 $9+2^{n-8}$ 为一个奇数的完全平方. 设

$$9+2^{n-8}=(2k+1)^2=4k^2+4k+1,$$

于是
$$4(k-1)(k+2)=2^{n-8},$$
$$(k-1)(k+2)=2^{n-10}.$$

由于$k-1$和$k+2$为一奇、一偶，于是只能是$k-1=1$，即$k=2$. 从而$n-10=2$，即$n=12$.

$\therefore n=12$是唯一能使N为平方数的自然数n.

[例 18] 甲、乙两人合养了n头羊，而每头羊的卖价又恰为n元，全部卖完后，两人分钱方法如下：先由甲拿十元，再由乙拿十元，如此轮流，拿到最后，剩下不足十元，轮到乙拿去. 为了平均分配，甲应该补给乙多少元.（第2届"祖冲之杯"初中数学邀请赛试题）

解 n头羊的总价为n^2元，由题意知n^2元中含有奇数个10元，即完全平方数n^2的十位数字是奇数. 如果完全平方数的十位数字是奇数，则它的个位数字一定是6. 所以，n^2的末位数字为6，即乙最后拿的是6元，从而为平均分配，甲应补给乙2元.

[例 19] 设m,n是正整数，求证：3^m+3^n+1不可能是完全平方数.

分析 要证明一个数不是完全平方数，较自然的想法是证明它的末位数不是0,1,4,5,6,9，而3的幂的末位数字有3,9,7,1这四种可能，对于m,n的可能的取值，3^m+3^n+1的末位数有出现1,5,9的可能，从这条思路做下去就遇到了麻烦. 我们换一个角度考虑.

证明 因3^m+3^n+1是奇数，若它是一个完全平方数，则它是一个奇数的平方. 由于奇数的平方除以8余1，从而就有$3^m+3^n\equiv 0 \pmod 8$. 但是对于任一自然数a，有

$$3^a\equiv 1 \text{ 或 } 3 \pmod 8,$$

因此，对任何正整数m,n，有

$$3^m+3^n\equiv 2,4,6 \pmod 8.$$

导出矛盾，从而命题得证.

［例 20］ 矩形四边的长度是小于 10 的整数(单位：厘米)，这四个长度数可构成一个四位数，这个四位数的千位数字与百位数字相同，并且这个四位数是一个完全平方数，求这个矩形的面积.(1986 年缙云杯初二数学竞赛题)

解 设矩形的边长为 x,y，则四位数 $N=1000x+100x+10y+y=1100x+11y=11(100x+y)=11(99x+x+y)$. $\because N$ 是完全平方数，11 为素数，$\therefore x+y$ 能被 11 整除. 又 $1\leqslant x\leqslant 9$，$1\leqslant y\leqslant 9$，$\therefore 2\leqslant x+y\leqslant 18$，得 $x+y=11$. $\therefore N=11(99x+x+y)=11^2\cdot(9x+1)$. $\therefore 9x+1$ 是一个完全平方数，而 $1\leqslant x\leqslant 9$，验算知 $x=7$ 满足条件. 又由 $x+y=11$ 得 $y=4$. $\therefore S=xy=28(\text{cm}^2)$.

［例 21］ 在平面直角坐标系 xOy 中，我们把横坐标为自然数，纵坐标是完全平方数的点都染成红点. 试将函数 $y=(x-36)(x-44)-1991$ 的图形所通过的"红点"都确定下来.(1991 年北京市高一数学竞赛题)

解 设 $y=m^2$，m 为自然数. 则

$$(x-90)^2-4907=m^2.$$

令 $x-90=k$，则 $k^2-m^2=4907$. 由于 $4907=7\times701$ 是两个质数相乘，$k-m<k+m$，所以由

$$\begin{cases}k-m=7,\\k+m=701,\end{cases}$$

得 $k=354$，$m=347$，$x=444$.

或由

$$\begin{cases}k-m=1,\\k+m=4907,\end{cases}$$

得 $k=2454$，$m=2453$，$x=2544$. 当

$$\begin{cases}k-m=-4907,\\k+m=-1,\end{cases} \quad 及 \quad \begin{cases}k-m=-701,\\k+m=-7\end{cases}$$

时，解得 x 均为负整数，不合要求．所以，其图象只通过两个红点，它们是(444，120409)与(2544，6017209)．

[例 22] 对于任意给定的数码排列 $A=\overline{a_1a_2\cdots a_n}$，求证：总可以找到一个完全平方数，使此数的前 k 个数码恰好是给定的数码排列 A．

证明 若自然数 n 的前 k 个数码恰好是给定的数码排列 A，即 $n=\overline{a_1a_2\cdots a_kb_1b_2\cdots b_l}$，则 $A\cdot 10^l\leqslant n<(A+1)\cdot 10^l$；反之亦然．因此，要证命题成立，只要证明存在自然数 m 及非负整数 l，使 $A\cdot 10^l\leqslant m^2<(A+1)\cdot 10^l$，即 $\sqrt{A\cdot 10^l}\leqslant m<\sqrt{(A+1)\cdot 10^l}$．为了证明 m 的存在，应证明存在非负整数 l，使 $\sqrt{(A+1)\cdot 10^l}-\sqrt{A\cdot 10^l}>1$．而

$$\begin{aligned}&\sqrt{(A+1)\cdot 10^l}-\sqrt{A\cdot 10^l}\\&=\frac{(A+1)\cdot 10^l-A\cdot 10^l}{\sqrt{(A+1)\cdot 10^l}+\sqrt{A\cdot 10^l}}\\&=\frac{10^l}{\sqrt{(A+1)\cdot 10^l}+\sqrt{A\cdot 10^l}}\\&=\frac{10^{\frac{l}{2}}}{\sqrt{A+1}+\sqrt{A}}.\end{aligned}$$

显然上式最后结果的分母对给定的数码排列 A 而言是常数，而分子 $10^{\frac{l}{2}}$ 随着 l 的增大可以无限地增大，因此，可以选取足够大的自然数 l，使

$$\sqrt{(A+1)\cdot 10^l}-\sqrt{A\cdot 10^l}=\frac{10^{\frac{l}{2}}}{\sqrt{A+1}+\sqrt{A}}>1.$$

命题因此得证．

[例 23] 一间房间有 n 个抽屉，标上号码 1 至 n，全部锁上．n 个人 $p_1,p_2,p_3,\cdots,p_n$ 排成一列，依次通过这间房间，每

个人 p_k 将(并且仅将)那些标号被 k 整除的抽屉的状态改变，即如果抽屉锁是开的，p_k 将它锁上，如果抽屉是锁的，p_k 将它打开. 在 n 个人全部通过这间房间后，有哪些抽屉是打开的？如果这 n 个人进行同样的操作，但依照某种不同的次序通过，结果又如何？

解 因为 n 个抽屉在开始时全部锁着，所以当 n 个人全部通过这间房间后，若有某抽屉是打开的，那么该抽屉一定被操作过奇数次，若某抽屉是锁着的，则该抽屉一定被操作过偶数次.

另一方面，根据题意，每个人 p_k 将(且仅将)对那些标号被 k 整除的抽屉进行一次操作，因此，当 n 个人全部通过这间房间后，若某抽屉是打开的，则该抽屉的编号一定具有奇数个因数. 根据完全平方数的性质 13，该抽屉的编号一定是一个完全平方数. 故当 n 个人全部通过这间房间后，那些编号为完全平方数的抽屉是打开的.

[**例 24**] 求出满足 $x^2=1+4y^3(y+2)$ 的所有整数 x 和 y.(1992 年加拿大第 33 届 IMO 训练题)

解 若 $y=0$ 或 -2，则 $x^2=1$，从而 $x=1$ 或 -1.

若 $y=-1$，则 $x^2=-3$，从而 x 是非实数.

若 $y\geqslant-1$，则 $4y^2>1>1-4y$，由此推出

$$\begin{aligned}4y^4+8y^3+4y^2&>4y^4+8y^3+1\\&>4y^4+8y^3-4y+1,\end{aligned}$$

即

$$(2y^2+2y)^2>x^2>(2y^2+2y-1)^2,$$

$\therefore x$ 不是一个整数.

若 $y\leqslant-3$，则

$$1-4y>1>4[1-y(y+2)],$$

$$\therefore\quad 4y^4+8y^3-4y+1>4y^4+8y^3+1$$

$$> 4y^4 + 8y^3 - 4y^2 - 8y - 4,$$

即 $$(2y^2-2y-1)^2 > x^2 > (2y^2+2y-2)^2,$$

$\therefore x$ 是非整数.

于是方程只有四组解：

$(x,y)=(1,0)$，$(1,-2)$，$(-1,0)$，$(-1,-2)$.

［**例 25**］ 求证：若 x,y 为正整数，使得 x^2+y^2-x 被 $2xy$ 整除，则 x 为完全平方数.（1991 年英国数学奥林匹克试题）

证法 1 设 $x^2+y^2-x=2kxy$（k 为整数），则关于 y 的二次方程

$$y^2-2kxy+(x^2-x)=0$$

的根中有一个 $y_1(=y)$ 是整数，另一个

$$y_2=2kx-y_1$$

也是整数，其判别式

$$\Delta=4[k^2x^2-(x^2-x)]=4x[(k^2-1)x+1]$$

应为完全平方数.

由于 x 与 $(k^2-1)x+1$ 互质（它们的最大公约数 $(x,(k^2-1)x+1)=(x,1)=1$），所以，x 是完全平方数.

证法 2 设 $x^2+y^2-x=2kxy$（k 为整数），对 x 的任一质因数 p，若在 x 的分解式中 p 的指数为奇数 $2m+1$，则由上面的等式，p^{2m+1} 整除 y^2，从而 $p^{2(m+1)}$ 整除 y^2.

由于 $p^{2(m+1)}$ 整除 $2kxy$，上面的等式导出 $p^{2(m+1)}$ 整除 x，矛盾！所以，在 x 的分解式中 p 的指数必为偶数，即 x 为完全平方数.

［**例 26**］ 设正整数 d 不等于 2，5，13. 求证：在集合 $\{2,5,13,d\}$ 中可以找到两个不同的元素 a 和 b，使得 $ab-1$ 不是完全平方数.（1986 年第 27 届 IMO 试题）

证明 由于 $2\times5-1=9$，$2\times13-1=25$，$13\times5-1=64$ 都是平方数，所以只要证明 $2d-1$，$5d-1$，$13d-1$ 中至少有一个不是平方数就可以了.

(i) 若 d 是偶数，设 $d=2m$（m 是整数），则 $2d-1=4m-1=4(m-1)+3$.

由于 $4k+3$ 型的数一定不是平方数，则 $2d-1$ 不是平方数；

(ii) 若 d 是奇数，则 d 为 $4k+1$ 或 $4k+3$ 型. 如果 $d=4k+3$，则

$$5d-1=20k+14=4(5k+3)+2.$$

而 $4k+2$ 型的数不是平方数，所以 $5d-1$ 不是平方数；如果$d=4k+1$，则

$$5d-1=4(5k+1),\quad 13d-1=4(13k+3).$$

因 4 是平方数，所以，只要证明 $13k+3$ 和 $5k+1$ 至少有一个不是平方数就可以了.

设 $13k+3$ 是平方数，则 $13k+3$ 为 $4n+1$ 型或 $4n$ 型. 此时

$$5k+1=13k-8k+3-2=4(n-2k-1)+3$$

或 $$5k+1=13k-8k+3-2=4(n-2k-1)+2$$

都不是平方数.

同样可证明若 $5k+1$ 是平方数，则 $13k+3$ 不是平方数.

于是本题得证.

证法 2 若 $2d-1$，$5d-1$，$13d-1$ 都是平方数，则它们的乘积

$$N=(2d-1)(5d-1)(13d-1)=130d^3-101d^2+6d-1$$

也应是平方数. 容易看出，d 为偶数时，N 为 $4k+3$ 型，显然不是平方数.

若 d 为奇数，设 $d=2k+1$，则

$$N=1040k^3+1156k^2+388k+32+2.$$

N 是一个 $4n+2$ 型的数，也不是平方数. 于是 $2d-1,5d-1$，$13d-1$ 至少有一个不是平方数.

证法 3 用反证法. 假定 $2d-1,5d-1,13d-1$ 都是完全平方数，即

$$2d-1=x^2, \qquad ①$$

$$5d-1=y^2, \qquad ②$$

$$13d-1=z^2, \qquad ③$$

其中 x,y,z 都是正整数. 由①知，x 为奇数，设 $x=2n-1$，$\therefore 2d-1=(2n-1)^2$，即 $d=2n^2-2n+1$，$\therefore d$ 也是奇数.

由②，③知 y,z 是偶数. 设 $y=2p,z=2q$，代入后两式相减并除以 4，得

$$2d=q^2-p^2=(q+p)(q-p).$$

$\because 2d$ 是偶数，即 q^2-p^2 是偶数，$\therefore p,q$ 同奇或同偶. 从而 $q+p$ 和 $q-p$ 都是偶数，即 $2d$ 是 4 的倍数，那么 d 是偶数，与前面推出 d 是奇数相矛盾. 命题得证.

［**例 27**］ 在等腰$\triangle ABC$ 中，已知 $AB=AC=kBC$，这里 k 为大于 1的自然数，点 D,E 依次在 AB,AC 上，且 $DB=BC=CE$，CD 与 BE 相交于 O. 求使 OC/BC 为有理数的最小自然数 k.（1991 年上海市初中数学竞赛题）

解 如图 39，连 DE，易知 $BCED$ 为等腰梯形，又由题设可知$\angle 2=\angle 1=\angle 3$，故有$\triangle OBC\backsim\triangle BCD$，即

$$OC\cdot CD=BC^2. \qquad ①$$

又因$\dfrac{CO}{OD}=\dfrac{BC}{DE}=\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{AB}{AB-DB}=\dfrac{k}{k-1}$，

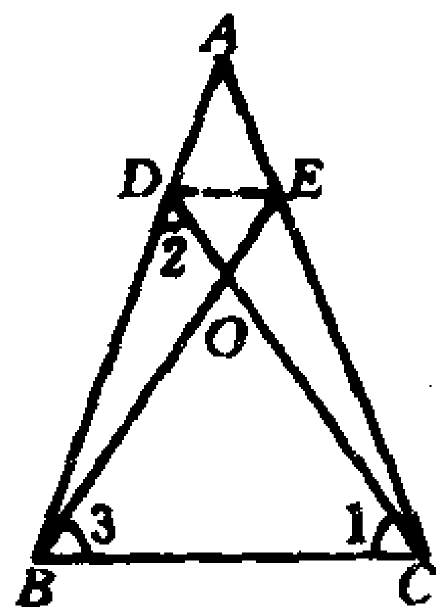


图 39

$$\therefore \quad \frac{CO}{CD}=\frac{k}{2k-1}. \qquad ②$$

①×②，得 $$\frac{OC}{BC}=\sqrt{\frac{k}{2k-1}}.$$

∵ $\sqrt{\frac{k}{2k-1}}$是有理数，且 k 与 $2k-1$ 互质，∴k 与 $2k-1$ 都是完全平方数.

当 $k=4,9,16$ 时，$2k-1=7,17,31$ 都不是完全平方数；

当 $k=25$ 时，$2k-1=49$ 是完全平方数.

综上所述，使$\frac{OC}{OB}$为有理数的最小自然数 $k=25$.

[例 28] 设 $f(x)=x+[x]$，其中$[x]$表示不超过 x 的最大整数. 试证：对于任意自然数 m，数列 $m, f(m), f(f(m)), f(f(f(m))), \cdots$ 中必含有完全平方数.（第 44 届美国普特南数学竞赛试题）

证明 若 m 为完全平方数，结论显然成立. 否则设 $m=k^2+r$，其中 r,k 为整数，且 $0<r\leqslant 2k$.

令
$$A=\{m \mid m=k^2+r, 0<r\leqslant k\},$$
$$B=\{m \mid m=k^2+r, k<r\leqslant 2k\}.$$

对于 B 中的每一个 $m=k^2+r$，由 $k<r\leqslant 2k$ 可知 $[\sqrt{k^2+r}]=k$；进而

$$f(m)=k^2+r+k=(k+1)^2+(r-k-1).$$

由于 $0\leqslant r<k-1<k$，故 $f(m)\in A$. 说明只须考虑 m 在 A 中的情况.

设 $m=k^2+r, 0<r\leqslant k$，则 $f(m)=m+k$；

$$f(f(m))=f(m+k)=m+2k=(k+1)^2+(r-1).$$

注意到 r 的变化特点，随着 f 的复合，

$$r \to r-1 \to r-2 \to \cdots \to 2 \to 1 \to 0.$$

说明当 $r=0$ 时，在数列 $m, f(m), f(f(m)), \cdots$ 中的项必为完全平方数.

[**例 29**] 如果 n 是正整数，求证：$[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}]=[\sqrt{4n+2}]$.（第 8 届美国普特南数学竞赛题或 1987 年第 19 届加拿大数学竞赛题）

解 根据 $m^2 \leqslant n < (m+1)^2$，设 $n=m^2+k$，其中 $0 \leqslant k \leqslant 2m$. 当 $0 \leqslant k \leqslant m-1$ 时，

由 $m^2 \leqslant n < m^2+m-1$，得

$$m \leqslant \sqrt{n} < \sqrt{m^2+m-1} < \sqrt{m^2+m+\frac{1}{4}} = m+\frac{1}{2};$$

又由 $m^2 < n+1 < m^2+n$，得

$$m < \sqrt{n+1} < \sqrt{m^2+m} < m+\frac{1}{2}.$$

从而 $2m < \sqrt{n}+\sqrt{n+1} < 2m+1$，即 $[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}]=2m$.

另一方面，

$$2m \leqslant \sqrt{4m^2+4k} < \sqrt{4n+2} < \sqrt{4m^2+4m+1} = 2m+1,$$

即
$$[\sqrt{4n+2}]=2m.$$

当 $m \leqslant k \leqslant 2m$ 时，

$$\sqrt{n}+\sqrt{n+1} \leqslant \sqrt{m^2+2m}+\sqrt{m^2+2m+1} < 2m+2;$$

$$\begin{aligned}\sqrt{n}+\sqrt{n+1} &\geqslant \sqrt{m^2+m}+\sqrt{m^2+m+1} \\ &= 2m+1+(\sqrt{m^2+m}-m)-(m+1-\sqrt{m^2+m+1}) \\ &= 2m+1+\frac{m}{\sqrt{m^2+m}+m}-\frac{m}{m+1+\sqrt{m^2+m+1}} \\ &> 2m+1,\end{aligned}$$

而
$$2m+1 < \sqrt{4m^2+4m+2} \leqslant \sqrt{4n+2}$$

$$\leqslant \sqrt{4m^2+8m+2} \leqslant 2m+2,$$

故有 $\quad [\sqrt{n}+\sqrt{n+1}]=[\sqrt{4n+2}]=2m+1.$

[例 30] 令 $P(x,y)=2x^2-6xy+5y^2$. 若存在整数 B, C, 使得 $P(B,C)=A$, 则称 A 为 P 的值.

(1) 在 $\{1,2,\cdots,100\}$ 中, 哪些元素是 P 的值?

(2) 证明 P 的值的积仍然是 P 的值. (1991 年第 6 届拉丁美洲数学奥林匹克试题)

解 易知, $P(x,y)=(x-y)^2+(x-2y)^2$. 即如果 A 是 P 的值, 则 A 是两个整数的平方和. 反之, 若 A 是两个整数的平方和, $A=U^2+V^2$. 令 $x=2U-V$, $y=U-V$, 则 x,y 均为整数, 于是 A 为 P 的值.

因此, 一个数是 P 的值的充要条件是这个数可写成两个整数的平方和.

(1) 在集合 $\{1,2,\cdots,100\}$ 中, 下列元素是 P 的值:

1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 17, 18, 20, 25, 26, 29, 32, 34, 36, 37, 40, 41, 45, 49, 50, 52, 53, 58, 61, 64, 65, 68, 72, 73, 74, 80, 81, 82, 85, 89, 90, 97, 98, 100.

(2) 设 A_1, A_2 是 P 的值, 即 $A_1=U_1^2+V_1^2$, $A_2=U_2^2+V_2^2$, 可得

$$\begin{aligned} A_1A_2 &= (U_1^2+V_1^2)(U_2^2+V_2^2) \\ &= (U_1U_2+V_1V_2)^2+(U_1V_2-U_2V_1)^2, \end{aligned}$$

从而 A_1A_2 也是 P 的值.

[例 31] 设 a_n 为下述自然数 N 的个数: N 的各位数字之和为 n 且每位数字只能取 1, 3 或 4. 求证: a_{2n} 是完全平方数, 这里 $n=1,2,\cdots$. (1991 年全国高中数学联赛题)

证明 设 $N=\overline{x_1x_2\cdots x_k}$, 这里 $x_1,x_2,\cdots,x_k\in\{1,3,4\}$ 且

$x_1+x_2+\cdots+x_k=n.$

设 $n>4$，当 $x_1=1$ 时，有 $x_2+\cdots+x_k=n-1$，故依题设此时符合条件的 N 有 a_{n-1} 个. 同理，当 x_1 分别为 3 及 4 时，符合条件的 N 有 a_{n-3} 及 a_{n-4} 个. 故得递归关系：

$$a_n=a_{n-1}+a_{n-3}+a_{n-4}. \quad (n>4) \qquad ①$$

由①可推得

$$a_{2n}=2a_{2(n-1)}+2a_{2(n-2)}-a_{2(n-3)}. \quad (n>3) \qquad ②$$

事实上，由①有

$$\begin{aligned} a_{2n} &= a_{2n-1}+a_{2n-3}+a_{2n-4} \\ &= a_{2n-2}+a_{2n-5}+a_{2n-3}+a_{2n-4} \\ &= a_{2n-2}+2a_{2n-4}+a_{2n-2}-a_{2n-6} \\ &= 2a_{2n-2}+2a_{2n-4}-a_{2n-6}. \end{aligned}$$

取数列 $\{f_n\}$：$f_1=1, f_2=2$，且 $f_{n+2}=f_n+f_{n+1}$ $(n=1,2,\cdots)$. 下面用归纳法证明：

$$a_{2n}=f_n^2. \quad (n=1,2,\cdots) \qquad ③$$

当 $n=1,2,3$ 时，不难求得 $a_2=1, a_4=4, a_6=9$ 及 $f_1=1$, $f_2=2, f_3=3$，故③对 $n=1,2,3$ 成立.

设 $a_{2k}=f_k^2$ $(k\leqslant n-1, n>3)$，于是由②得

$$\begin{aligned} a_{2n} &= 2f_{n-1}^2+2f_{n-2}^2-f_{n-3}^2 \\ &= (f_{n-1}+f_{n-2})^2+(f_{n-1}-f_{n-2})^2-f_{n-3}^2 \\ &= f_n^2+f_{n-3}^2-f_{n-3}^2=f_n^2. \end{aligned}$$

$\because f_n$ 为自然数 $(n=1,2,\cdots)$，故由③知 a_{2n} 是完全平方数.

说明 得到①式后，也可用特征根方法求出 a_n 的通项公式为

$$a_n=\frac{2-i}{10}i^n+\frac{2+i}{10}(-i)^n+\frac{1}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}+\frac{1}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2},$$

就不难证得 a_{2n} 是完全平方数.

另证 设 A 为数码仅有 1,3,4 的数的全体,$A_n=\{N\in A,N$ 的各位数码之和为 $n\}$,则 $|A_n|=a_n$. 欲证 a_{2n} 是完全平方数. 再记 B 为数码仅有 1,2 的数的全体,$B_n=\{N\in B,N$ 的各位数码之和为 $n\}$,令 $|B_n|=b$. 下面证 $a_{2n}=b_n^2$.

作映射 f: $B\to N$(自然数集),对 $N\in B$,$f(N)$是由 N 按如下法则得到的一个数:把 N 的数码从左向右看,凡见到 2,把它与后面的一个数相加,用和代替,再继续看下去,直到不能做为止(例如 $f(1221212)=14132$,$f(21121221)=313417$). 易知 f 是单射,于是 $f(B_{2n})=A_{2n}\cup A'_{2n-2}$,其中 $A'_{2n-2}=\{10k+2,k\in A_{2n-2}\}$. 所以

$$b_{2n}=a_{2n}+a_{2n-2},\quad 但\quad b_{2n}=b_n^2+b_{n-1}^2.$$

这是因为 B_{2n} 中的数或是两个 B_n 中的数拼接而成,或是两个 B_{n-1} 中的数中间放 2 拼接而成,

$\therefore\quad a_{2n}+a_{2n-2}=b_n^2+b_{n-1}^2.\quad (n\geqslant 2)$

$\because a_2=b_1^2=1$,由上式便知,对一切 $n\in N$,$a_{2n}=b_n^2$,即 a_{2n} 是完全平方数.

[**例 32**] 已知整数列 $\{a_0,a_1,a_2,\cdots\}$ 满足:

(1) $a_{n+1}=3a_n-3a_{n-1}+a_{n-2}$,$(n=2,3,\cdots)$

(2) $2a_1=a_0+a_2-2$,

(3) 对任意自然数 m,在数列 $\{a_0,a_1,a_2,\cdots\}$ 中必有相继的 m 项 $a_k,a_{k+1},\cdots,a_{k+m-1}$ 都是完全平方数. 求证:$\{a_0,a_1,a_2,\cdots\}$ 的所有项都是完全平方数.(1992 年中国数学奥林匹克试题)

证明 由(1)可知对任何 $n\geqslant 2$,有

$$a_{n+1}-a_n=2(a_n-a_{n-1})-a_{n-1}-a_{n-2}.$$

记 $d_n=a_n-a_{n-1}(n=1,2,\cdots)$,则

$$d_{n+1}-d_n=d_n-d_{n-1}=\cdots=d_2-d_1.$$

由(2)可得 $d_2-d_1=a_2-2a_1+a_0=2$，所以

$$a_n=a_0+\sum_{k=1}^{n}d_k=a_0+nd_1+n(n-1),$$

即
$$a_n=n^2+bn+c,(n=0,1,2,\cdots)$$

其中 $b=a_1-a_0-1,c=a_0$.

下面对所得结果给出两种证法.

证法 1 由(3)可知存在非负整数 l，使得 a_l 和 a_{l+2} 都是完全平方数，从而

$$a_{l+2}-a_l\not\equiv 2(\mathrm{mod}4).$$

又 $a_{l+2}-a_l=4l+4+2b$，所以 b 是偶数，令 $b=2\lambda$，则 $a_n=(n+\lambda)^2+c-\lambda^2$. 可以证明 $c-\lambda^2=0$，从而 $a_n=(n+\lambda)^2,n=0,1,2,\cdots$. 事实上，反设 $c-\lambda^2\neq 0$，则它的不同约数只有有限多个，其个数设为 μ，由通项公式可知，存在 n_0 使得当 $n\geqslant n_0$ 时，数列 a_n 严格单调递增. 由条件(3)，存在 $k\geqslant n_0$，使得

$$a_{k+i}=P_i^2,\quad(i=0,1,2,\cdots,\mu)$$

其中 P_i 是非负整数且 $P_0<P_1<P_2<\cdots<P_n$，由此可知 $c-\lambda^2=P_i^2-(k+i+\lambda)^2=(P_i-k-i-\lambda)(P_i+k+i+\lambda),i=0,1,2,\cdots,\mu$，矛盾！

证法 2 由于 $a_n=n^2+bn+c$，从而存在 n_0 使得当 $n\geqslant n_0$ 时，数列 $\{a_n\}$ 严格单调递增，且

$$0<\left(n-\frac{|b|+1}{2}\right)^2\leqslant a_n\leqslant\left(n+\frac{|b|+1}{2}\right)^2,$$

于是

$$0<\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}=\frac{a_{n+1}-a_n}{\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_n}}$$

$$< \frac{2n+1+b}{2\sqrt{a_n}} \leqslant \frac{2n+1+b}{2n-|b|-1},$$

由此可知，存在 $n_1 \geqslant n_0$，使得当 $n \geqslant n_1$ 时，

$$0 < \sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n} < 2.$$

利用条件(3)易知存在 $k \geqslant n_1$，使得 a_k 和 a_{k+1} 都是完全平方数，所以 $\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k} = 1$，记 $\sqrt{a_k} = t$，由通项公式可得

$$a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1} + 2, (n=1,2,\cdots)$$

$$\therefore \quad a_{k+2} = 2(t+1)^2 - t^2 + 2 = t^2 + 4t + 2 = (t+2)^2,$$

$$a_{k-1} = 2t^2 - (t+1)^2 + 2 = t^2 - 2t + 1 = (t-1)^2.$$

于是用归纳法易证数列 $\{a_0, a_1, a_2, \cdots\}$ 的所有项都是完全平方数.

例 32 中的条件(3)可以减弱为

(3)′ $\{a_0, a_1, \cdots\}$ 中有无穷多个平方数.

证明 由(1)，(2)可得

$$a_n = n^2 + bn + c, (n=0,1,2,\cdots)$$

其中 $b = a_1 - a_0 - 1$，$c = a_0$ 均为整数.

若 $b = 2b_0 + 1$ 为奇数，则

$$a_n = (n+b_0)^2 + (n+b_0) + c - b_0 - b_0^2.$$

$\because$ $\{a_0, a_1, a_2, \cdots\}$ 中有无穷多个平方数，$\therefore$ 存在正整数 k，使得 a_k 是完全平方数，且

$$k + b_0 > |c - b_0 - b_0^2|,$$

于是

$$(k+b_0)^2 < (k+b_0)^2 + (k+b_0) + c - b_0 - b_0^2$$
$$< (k+b_0+1)^2.$$

这与 a_k 为完全平方数矛盾.

$\therefore b$ 为偶数，设 $b=2b_0$，则

$$a_n=(n+b_0)^2+c-b_0^2.$$

$\because$ 存在正整数 k，使 a_k 为完全平方数，且

$$2(k+b_0)-1>|c-b_0^2|,$$

$$\therefore\quad (k+b_0-1)^2<(k+b_0)^2+(c-b_0^2)<(k+b_0+1)^2.$$

$\because a_k$ 是完全平方数，$\therefore a_k=(k+b_0)^2$，$c-b_0^2=0$，从而 $a_n=(n+b_0)^2$，$n=0,1,2,\cdots$，即 $\{a_0,a_1,a_2,\cdots\}$ 的所有项都是完全平方数.

［例 33］ 求证：一个奇自然数 c 为合数，它的充分必要条件是存在自然数 $a\leqslant\frac{c}{3}-1$，使 $(2a-1)^2+8c$ 为平方数.（1986 年上海市高中数学竞赛题）

证明 充分性：设 $(2a-1)^2+8c=(2t+1)^2$ 为完全平方数. $\because a\leqslant\frac{c}{3}-1$，$c\geqslant3(a+1)$，

$$\therefore\quad (2a-1)^2+8c\geqslant 4a^2-4a+1+24(a+1)$$

$$=4a^2+20a+25=(2a+5)^2;$$

$$2t+1\geqslant2a+5,\ t\geqslant a+2,$$

$$8c=(2t+1)^2-(2a-1)^2=4(t+a)(t-a+1),$$

$$2c=(t+a)(t-a+1).$$

右边两个因数中总有一个是偶数，且 $t+a\geqslant4$，$t-a+1\geqslant3$，故 c 可分解为两个大于 1 的因数的乘积，从而 c 为合数.

必要性：设 c 为合数，则 c 可分解为两个大于 1 的奇数之积. 将较小的记为 $2k-1$，较大的记为 q，则 $c=(2k-1)q$，$k\geqslant22$，$q\geqslant2k-1$.

令 $a=q-k+1$，则

$$a=\frac{c}{2k-1}-k+1\leqslant\frac{c}{2k-1}-1\leqslant\frac{c}{3}-1,$$

且 $(2a-1)^2+8c=(2q-2k+1)^2+8(2k-1)q$

$$=[2q-(2k-1)]^2+4\cdot 2q(2k-1)$$

$$=[2q+(2k-1)]^2,$$

$\therefore$ $(2a-1)^2+8c$ 是完全平方数.

[**例 34**] (1) 求证：有无穷多个整数 n，使 $2n+1$ 与 $3n+1$ 为完全平方数，并证明这样的 n 是 40 的倍数；

(2) 更一般地，求证：若 m 为正整数，则有无穷多个整数 n，使 $mn+1$ 与 $(m+1)n+1$ 为完全平方数.(1989 年第 30 届加拿大 IMO 训练题)

证明 (1) 若有

$$2n+1=a^2,\ 2(2n^2+2n)+1=a^2, \qquad ①$$

$$3n+1=b^2,\ 3(3n^2+2n)+1=b^2, \qquad ②$$

则由①知 a 为奇数 $2k+1$，因此

$$2n=a^2-1=(2k+1)^2-1=4k(k+1),$$

从而 n 是偶数，b 是奇数 $2h+1$，因此

$$3n=b^2-1=(2h+1)^2-1=4h(h+1).$$

$\because h(h+1)$ 是偶数，$\therefore 8|n$.

如果 $n\equiv 1,3(\mathrm{mod}5)$，则 $2n+1\equiv 3,2(\mathrm{mod}5)$；

如果 $n\equiv 2,4(\mathrm{mod}5)$，则 $3n+1\equiv 2,3(\mathrm{mod}5)$；但易知平方数 $\equiv 0,1,4(\mathrm{mod}5)$，故必须 $5|n$，从而 $40|n$.

(2)
$$mn+1=a^2, \qquad ③$$

$$(m+1)n+1=b^2, \qquad ④$$

等价于
$$n=b^2-a^2, \qquad ⑤$$

$$m(b^2-a^2)+1=a^2. \qquad ⑥$$

由⑤,⑥得

$$(m+1)a^2-mb^2=1. \qquad ⑦$$

令
$$x=(m+1)a,\ y=b, \qquad ⑧$$

得 $$x^2-m(m+1)y^2=m+1, \qquad ⑨$$

$$\therefore \quad x=m+1,\ y=1. \qquad ⑩$$

而 Pell 方程 $x^2-m(m+1)y^2=1$ 有解 $x=2m+1,y=2$，于是⑨有无穷多组正整数解 x,y，它们可由

$$x+\sqrt{m(m+1)}y=(m+1+\sqrt{m(m+1)})\cdot(2m+1+2\sqrt{m(m+1)})^k \qquad ⑪$$

(其中 k 为非负整数)给出，由⑪可以看出 x 为 $m+1$ 的倍数，因此，由⑧可得正整数 a,b 适合⑦，由⑤给出整数 n. m,n 适合⑤，⑦，因而适合⑤，⑥，即有无数多个整数 n 满足③，④.

4. 完全立方数及其他

和完全平方数的定义类似，一个整数恰好是另一个整数的立方，我们称这个整数为完全立方数. 例如 27，1000 等都是完全立方数. 完全立方数也有许多重要性质，限于篇幅这里不再一一介绍. 更一般地，如果一个整数恰好是另一个整数的 n 次方(n 为自然数)，那么称这个数为 n 次方数. 下面就列举几个这方面的例子.

[**例 1**] 设 a,b,c,d 是正整数，满足 $a^5=b^4,c^3=d^2$，且 $c-a=19$，求 $a-b$.(1985 年美国数学邀请赛试题)

解 由 $a^5=b^4,c^3=d^2$，注意到 5 与 4 互质，2 与 3 互质，可知存在两个正整数 m 及 n，使

$$a=m^4,\ b=m^5,\ c=n^2,\ d=n^3.$$

于是 $$19=c-a=n^2-m^4=(n+m^2)(n-m^2).$$

由于 19 是质数，$n-m^2<n+m^2$，于是必有

$$\begin{cases} n-m^2=1, \\ n+m^2=19, \end{cases} \quad 解得 \quad \begin{cases} m=3, \\ n=10. \end{cases}$$

$$d=n^3=1000,\ b=m^5=243.$$

$$\therefore\quad d-b=1000-243=757.$$

[**例 2**] 如果 $a<b<c<d<e$ 是连续的正整数，$b+c+d$ 是完全平方数，$a+b+c+d+e$ 是完全立方数，那么 c 的最小值是多少？（1989 年第 7 届美国数学邀请赛题）

解 因为 b,c,d 是连续的正整数，所以

$$b+c+d=3c,\ a+e=2c,$$

$$a+b+c+d+e=5c.$$

由于 $b+c+d$ 是完全平方数，$a+b+c+d+e$ 是完全立方数，所以可设

$$3c=m^2, \qquad ①$$

$$5c=n^3. \qquad ②$$

由①，得 $3|m$，故 $3|c$. 再由②得，$3|n$，所以 $3^3|c$，且 $5|n$. 从而 $5^2|c$，于是 $25\times27|c$.

因此，c 的最小值为 $25\times27=675$.

[**例 3**] 试找出最小的正整数 n，使它的立方的末三位数字是 888.（1988 年美国数学邀请赛试题）

解法 1 如果一个正整数的立方以 8 结尾，那么这个数本身必以 2 结尾. 即它可以写成 $n=10k+2$（k 为非负整数）的形式，于是

$$n^3=(10k+2)^3=1000k^3+600k^2+120k+8,$$

其中 $120k$ 这一项决定了 n^3 的十位数字.

由于要求 n^3 的十位数字是 8，则 $12k$ 也应是以 8 为个位，则 $k=4$ 或 9，因此，可设 $k=5m+4$（m 为非负整数），

$$\begin{aligned}n^3&=[10(5m+4)+2]^3\\&=125000m^3+315000m^2+26460m+74088.\end{aligned}$$

为使 n^3 的百位数字是 8，由于第一，三，四项的百位是 0，所以

必须使 2646m 的个位是 3，最小的 $m=3$. 这时

$$k=5m+4=19,\quad n=10k+2.$$

解法 2 由题意 $1000|n^3-888$，所以

$$1000|n^3+112-1000,\quad 1000|n^3+112.$$

$\therefore n$ 是偶数. 设 $n=2k$，则

$$1000|8k^3+112,\quad 125|k^3+14.$$

首先，必须 $5|k^3+14$，因此 k 的个位数字是 6 或 1. 当 k 的个位数字是 6 时，设 $k=10m+6$，

$$\begin{aligned}k^3+14&=(10m+6)^3+14\\&=1000m^3+1800m^2+1080m+230\\&=5(200m^3+360m^2+216m+46).\end{aligned}$$

$200m^3+360m^2+216m+46$ 的个位数字必须是 5，它的个位数字由 $216m+46$ 决定，m 的个位应是 4 或 9.

取最小的 $m=9$ 时，

$$\begin{aligned}&200m^3+360m^2+216m+46\\&=200m^3+29160+1944+46\\&=200m^3+31150,\end{aligned}$$

能被 25 整除，此时 $k=10m+6=96$，$n=2k=192$.

取 $m=4$ 时，

$$\begin{aligned}&200m^3+360m^2+216m+46\\&=200m^3+5760+910,\end{aligned}$$

不能被 25 整除.

当 k 的个位数字是 1 时，设 $k=16t+1$，

$$\begin{aligned}k^3+14&=1000t^3+300t^2+30t+15\\&=5(200t^3+60t^2+6t+3).\end{aligned}$$

若 $25|200t^3+60t^2+6t+3$，则 t 的个位数是 2 或 7. 取最小的 $t=2,7$ 进行验算：

$t=2$ 时，$200t^3+60t^2+6t+3=200t^3+255$ 不能被 25 整除；

$t=7$ 时，$200t^3+60t^2+6t+3=200t^3+2985$ 也不能被 25 整除.

于是，所求的最小正整数 $n=192$.

［例 4］ 求最小的正整数 a，使 $\frac{a}{2}$ 是完全平方数，$\frac{a}{3}$ 是立方数，$\frac{a}{5}$ 是五次方数.

分析 由题设知，所求的正整数的 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{5}$ 仍为整数，且这个整数必同时含有因数 2^x，3^y，5^z（$x\neq 0$，$y\neq 0$，$z\neq 0$），故可设 $a=2^x\cdot 3^y\cdot 5^z$.

解 设 $a=2^x\cdot 3^y\cdot 5^z$，由题意得：$\frac{a}{2}=2^{x-1}\cdot 3^y\cdot 5^z$ 是完全平方数，所以 $x-1$，y，z 都是偶数；$\frac{a}{3}=2^x\cdot 3^{y-1}\cdot 5^z$ 是一个立方数，所以 x，$y-1$，z 是 3 的倍数；$\frac{a}{5}=2^x\cdot 3^y\cdot 5^{z-1}$ 是一个五次方数，所以 x，y，$z-1$ 是 5 的倍数. 由此，x 既是 3 的倍数，又是 5 的倍数，最小公倍数是 15，又需满足 $x-1$ 是偶数的条件，故 $x=15$. 同理得 $y=10$，$x=6$.

［例 5］ 设 $n\in N$，$n>1$，求证：2^n-1 不是任何整数的平方，也不是任何整数的立方.

证明 若 $2^n-1=k^2$（$k\in N$），$\because n>1$，$\therefore k>1$，且 k 为奇数，令 $k=2t+1$（$t\in N$），则 $2^n=(2t+1)^2+1=2(2t^2+2t+1)$. 这说明 2^n 有一个大于 1 的奇约数 $2t^2+2t+1$，这是不可能的，$\therefore 2^n-1$ 不是完全平方数.

若 $2^n-1=k^3$（$k\in N$），则 $k>1$，且 $2^n=k^3+1=(k+1)(k^2$

$-k+1)$. ∵$k^2-k+1=k(k-1)+1$ 为一个大于 1 的奇数，它不可能是 2^n 的约数，从而得出矛盾，故 2^n-1 也不能是任何整数的立方.

［例 6］ 求证：存在无穷多个不能写成三个整数立方和形式的整数.

分析 本题的理想证法是通过构造，即具体给出无穷多个不能表示为三个整数立方和的整数，为此，先设法找出能表示成三个整数立方和形式的一个必要条件.

证明 任一整数都可写成 $3k$ 或 $3k\pm1$ 的形式，∵$(3k)^3=27k^3$，$(3k\pm1)^3=27k^3\pm27k^2+9k\pm1$，故任意整数的立方可写成 $9m$ 或 $9m\pm1$ 的形式. 于是三个整数的立方和 $n=m_1^3+m_2^3+m_3^3$ 可写成 $9t+r$ 的形式，这里 $-3\leqslant r\leqslant3$. 因此，形如 $9t\pm4$的整数都不可能表示为三个整数的立方和. 显然，形如 $9t\pm4(t\in Z)$的整数有无穷多个，由此命题得证.

［例 7］ 求一个四位数，使它等于它的四个数码和的四次方，并证明此数是唯一的.

解 设符合题意的四位数为$\overline{abcd}$，则$(a+b+c+d)^4=\overline{abcd}$，∴$10^4=10000$ 为五位数，$5^4=625$ 为三位数，∴$6\leqslant a+b+c+d=\sqrt[4]{\overline{abcd}}\leqslant9$. 经计算得，$6^4=1296$，$7^4=2401$，$8^4=4096$，$9^4=6561$，其中符合题意的只有 2401 一个.

［例 8］ 求这样的自然数 n，使 n^6 由数码 0，2，3，4，4，7，8，8，9 组成.

解 显然，$203447889\leqslant n^6\leqslant988744320$. 为了便于估计，我们把 n^6 的变化范围放大到 $10^8<n^6<10^9$，于是 $10^{\frac{4}{3}}<n<10^{\frac{3}{2}}$，即 $10\sqrt[3]{10}<n<10\sqrt{10}$. ∵ $\sqrt{10}\approx3.16$，$\sqrt[3]{10}\approx2.15$，∴ $22\leqslant n\leqslant31$.

另一方面，因已知九个数码之和是 3 的倍数，故 n^6 及 n 都是 3 的倍数. 这样，n 只有 24，27，30 三种可能. 但 30^6 结尾有六个 0，故 30 不合要求. 经计算得 $24^6=191102976$，$27^6=387420489$. 故所求的自然数 $n=27$.

［例 9］ 已知 x,y 是互素的自然数，k 是大于 1 的自然数. 找出满足：$3^n=x^k+y^k$ 的所有自然数 n，并给出证明.（1996 年第 22 届俄罗斯中学数学奥林匹克试题）

答 $n=2$.

证明 设 $3^n=x^k+y^k$，其中 x 与 y 互素（不妨设 $x>y$），$k>1$，n 是自然数. 显然，x,y 中的任何一个都不能被 3 整除.

如果 k 是偶数，则 x^k 和 y^k 被 3 除时余数都是 1. 这样，x^k 与 y^k 的和除以 3 时余数是 2，而不是 3 的整数次幂. 于是，推出矛盾，所以 k 不是偶数.

如果 k 是奇数且 $k>1$，则

$$3^n=(x+y)(x^{k-1}-\cdots+y^{k-1}).$$

这样 $x+y=3^m$，$m\geqslant1$. 以下证明：$n\geqslant2m$.

因为 k 可被 3 整除，取 $x_1=x^{\frac{k}{3}}$，$y_1=y^{\frac{k}{3}}$ 代入后，可以认为 $k=3$. 这样，$x^3+y^3=3^n$，$x+y=3^m$.

要证明 $n\geqslant2m$，只要证明 $x^3+y^3\geqslant(x+y)^2$，即证明 $x^2-xy+y^2\geqslant x+y$.

由于 $x\geqslant y+1$，则 $x^2-x=x(x-1)\geqslant xy$.

$$(x^2-x-xy)+(y^2-y)\geqslant0.$$

不等式 $n\geqslant2m$ 得证.

由恒等式 $(x+y)^3-(x^3+y^3)=3xy(x+y)$ 推出：

$$3^{2m-1}-3^{n-m-1}=xy, \qquad ①$$

而 $2m-1\geqslant1$，且

$$n-m-1\geqslant n-2m\geqslant0. \qquad ②$$

因此，如果②中至少有一个不等号是严格不等号，那么①式中的左端可被 3 整除，但右端不能被 3 整除，推出矛盾.

如果 $n-m-1=n-2m=0$，那么 $m=1,n=2$，且 $3^2=2^3+1^3$. 故 $n=2$.

［例 10］ 求 k 的最大值，使 3^{11}可以表示为 k 个连续正整数之和.（1987 年美国数学邀请赛试题）

解 假设 3^{11}表示成连续正整数之和

$$3^{11}=(n+1)+(n+2)+\cdots+(n+k), \qquad ①$$

其中 n 是非负整数，k 是正整数.

我们求满足①式的 k 的最大值.

$$3^{11}=nk+\frac{k(k+1)}{2},$$

$$2\cdot 3^{11}=k(2n+k+1),$$

显然 $k<2n+k+1$. 要使等式左边较小的因数 k 尽可能地大，又必须使 n 非负，则最大的可能是

$$k=2\cdot 3^5,\ 2n+k+1=3^6.$$

此时 $k=121$ 为非负整数，满足题目要求.

$$\therefore\quad 3^{11}=122+123+\cdots+607,$$

所求的最大的 k 为 $2\cdot 3^5=486$.

［例 11］ 试求一个非 1 的数 k，使 k 和 k^4 可以分别表示为相邻的两个整数的平方和，并证明这样的 k 只有一个.（1980 年北京市初中数学竞赛题）

为证明此题，我们先证明三个引理.

引理 1 不定方程

$$x^2+y^2=z^2 \qquad ①$$

的适合条件 $x>0,y>0,z>0,(x,y)=1$ 且 $z|y$ 的一切正整数解可以表示为

$$x=a^2-b^2,\ y=2ab,\ z=a^2+b^2, \qquad ②$$

其中 $a>b>0$，$(a,b)=1$，并且 a,b 之中有一个为奇数，有一个为偶数.

证明 $\because (x,y)=1$，由①式可判知 x,y,z 两两互质. 又 y 是偶数，所以 x,z 必均为奇数. 这时 $z+x, z-x$ 均为偶数，所以 $\frac{z+x}{2}, \frac{z-x}{2}$ 为整数. 令 $y=2y_1$，则

$$(2y_1)^2=z^2-x^2=(z+x)(z-x),$$

$$\therefore\quad y_1^2=\frac{z+x}{2}\cdot\frac{z-x}{2}.$$

设 $\frac{z+x}{2}=u$，$\frac{z-x}{2}=v$，则

$$z=u+v,\ x=u-v.$$

整数 u,v 应互质. 若不然，将与 x,z 互质矛盾. 由 $y_1^2=uv$，而 $(u,v)=1$ 知，u,v 之中的每一个都必须是完全平方数.

令 $u=a^2, v=b^2$，则有

$$z=u+v=a^2+b^2,\ x=u-v=a^2-b^2,$$

$y_1=\sqrt{uv}=ab$，$\therefore y=2ab$，其中 $(a,b)=1$，且 $a>b$.

反过来，我们将

$$x=a^2-b^2,\ y=2ab,\ z=a^2+b^2$$

$$(a,b \text{ 互质}, a>b>0)$$

代入①，易知它是此不定方程在 $(x,y)=1, 2|y$ 情况下的一切正整数解.

引理 2 方程 $x^2+y^2=k^4$ 适合条件 $(x,y)=1, 2|y$ 的一切正整数解为

$$x=|r^4+s^4-6r^2s^2|,\ y=4rs(r^2-s^2),\ k=r^2+s^2.$$

其中 $r>0, s>0, (r,s)=1$，r,s 一奇一偶.

证明 由引理 1 知，$x^2+y^2=(k^2)^2$ 的一切正整数解可表

示为

$$x=a^2-b^2,\ y=2ab,\ k^2=a^2+b^2, \qquad ③$$

其中$(x,y)=1, 2|y, a>b>0, (a,b)=1, a, b$一奇一偶.

再对 $k^2=m^2+n^2$ 应用引理 1,得

$$a=r^2-s^2,\ b=2rs,\ k=r^2+s^2, \qquad ④$$

其中 $r>s>0, (r,s)=1, r, s$ 一奇一偶.

将④式中 a, b 的表达式代入③,并注意到可能对 r, s 的值有 $b>a$,因此

$$x=|a^2-b^2|=|r^4+s^4-6r^2s^2|,$$

$$y=4rs(r^2-s^2),$$

$$k=r^2+s^2,$$

其中 $r>s>0, (r,s)=1, r, s$ 一奇一偶.

引理 3 一个不等于 1 的正整数若能表为相邻的两个正整数的平方和,则表示方法是唯一的.

证明 对一个不等于 1 的正整数 k,假设存在不同的正整数 a, b,都有

$$a^2+(a+1)^2=b^2+(b+1)^2=k^2,$$

则
$$a^2-b^2=(b+1)^2-(a+1)^2,$$

即
$$(a+b)(a-b)=(a+b+2)(b-a).$$

由于假设 $a\neq b$, $\therefore a-b=0$,

$$\therefore\quad a+b=-(a+b+2).$$

这就产生了一个正数与一个负数相等的矛盾.

因此,只能有 $a=b$. 引理 3 得证.

下面我们来证明原题:

由题意,k 与 k^4 均可表为相邻的两个整数的平方和,所以存在整数 u, v,使得

$$k=(u+1)^2+u^2,\ k^4=v^2+(v+1)^2.$$

显然 k 为不等于 1 的正整数，所以 u,v 也可限定为正整数. 又 $(u+1,u)=1,(v+1,v)=1$，所以可以对 $k^4=v^2+(v+1)^2$ 应用引理 2.

(i) 若 v 为偶数，则

$$v=4rs(r^2-s^2),\quad v+1=|r^4+s^4-6r^2s^2|,$$
$$k=r^2+s^2. \qquad (r>s>0,(r,s)=1)$$

但由引理 3，k 表为相邻两个正整数的平方和的方式唯一，所以 $r=u+1,s=u$. 由此

$$r=4(u+1)u[(u+1)^2-u^2]$$
$$=8u^3+12u^2+4u, \qquad ⑤$$
$$r+1=|(u+1)^4+u^4-6(u+1)^2u^2|$$
$$=4u^4+8u^3-4u-1. \qquad ⑥$$

⑥－⑤，得 $$1=4u^4-12u^2-8u-1,$$

即

$$2u^4-6u^2-4u-1=0. \qquad ⑦$$

易知方程⑦无整数解.

(ii) 若 v 为奇数，则

$$v+1=4(u+1)u[(u+1)^2-u^2]$$
$$=8u^3+12u^2+4u, \qquad ⑧$$
$$v=|(u+1)^4+u^4-6(u+1)^2u^2|$$
$$=|-4u^4-8u^3+4u+1|$$
$$=4u^4+8u^3-4u-1. \qquad ⑨$$

⑧－⑨，得 $$1=-4u^4+12u^2+8u+1,$$

即 $$u^4-3u^2-2u=0,\quad u(u-2)(u+1)^2=0.$$

∵u 为正整数，∴$u=2,u+1=3$.

$$v=119,\quad v+1=120.$$

∴$k=3^2+2^2=13$，经验证 $13^4=119^2+120^2$.

因此只有唯一的解 $k=13$ 满足要求.

习　题　五

1. 选择题

(1) 在整数 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 中,质数的个数为 x,偶数的个数为 y,完全平方数的个数为 z,则 $x+y+z$ 等于

(A) 14.　(B) 13.　(C) 12.　(D) 11.　(E) 10.

(1984 年北京市初二数学竞赛题)

(2) 若 $N=\sqrt{\underbrace{19851985\cdots1985}_{n\text{个}1985}-7^{n+1}}$,则 N 一定是

(A) 无理数.　(B) 末位数字是 1 的正整数.

(C) 首位数字是 5 的数.　(D) 以上答案都不对.

(1985 年北京市高一数学竞赛题)

(3) 下列哪一个数一定不是某个自然数的平方(其中 n 为自然数)

(A) $3n^2-3n+3$.　(B) $4n^2+4n+4$.　(C) $5n^2-5n-5$.

(D) $7n^2-7n+7$.　(E) $11n^2+11n-11$.

(1984 年天津市初中数学竞赛题)

(4) 下列各数:4822416,5382234,6573251,3352879 是完全平方数的个数是

(A) 1.　(B) 2.　(C) 3.　(D) 4.

(5) 一个整数的平方称为完全平方数.若 x 是一个完全平方数,那么它的下一个完全平方数是

(A) $x+1$.　(B) x^2+1.　(C) x^2+2x+1.

(D) x^2+x.　(E) $x^2+2\sqrt{x}+1$.

(1979 年第 30 届美国中学生数学竞赛题)

(6) 已知下面四组 x 和 y 的值中,有且只有一组使 $\sqrt{x^2+y^2}$ 是整数,这组 x 和 y 的值是

(A) $x=$832[illegible]9, $y=90288$.　(B) $x=82098$, $y=89028$.

(C) $x=28098$, $y=89082$.　(D) $x=90882$, $y=28809$.

(1991 年江苏省初中数学竞赛题)

(7) 已知数 $x=1\underbrace{00\cdots0}_{n个0}1\underbrace{00\cdots0}_{n+1个0}50$,则

(A) x 是完全平方数. (B) $x-50$ 是完全平方数.

(C) $x-25$ 是完全平方数. (D) $x+50$ 是完全平方数.

(第 1 届希望杯数学邀请赛初一试题)

(8) 使得 $2n(n+1)(n+2)(n+3)+12$ 可表成两个自然数的平方和的自然数 n 的个数是

(A) 0. (B) 1.

(C) 有限的(但多于 1). (D) 无限多的.

(1990 年广州等五市初中数学联赛题)

(9) 设 $p=\sqrt{\underbrace{11\cdots1}_{2n个}-\underbrace{22\cdots2}_{n个}}$($n$ 为自然数),则

(A) p 为无理数. (B) $p=\underbrace{11\cdots1}_{n个}$. (C) $p=\underbrace{22\cdots2}_{n个}$.

(D) $p=\underbrace{33\cdots3}_{n个}$. (E) $p=\underbrace{77\cdots7}_{n个}$.

(1983 年重庆市初中数学竞赛题)

(10) 一对四位数中,一个数的首末两个数字对调就是另一个数,那么两数和是四位数而且是完全平方数的这种数对有

(A) 4 对. (B) 6 对. (C) 8 对. (D) 10 对.

(1985 年上海市高中数学竞赛题)

(11) 三个连续自然数的平方和比它们的和的 8 倍还多 2,则此三个自然数的平方和为

(A) 77. (B) 149. (C) 194. (D) 245.

(1991 年第 3 届五羊杯初三数学竞赛题)

2. 填空题

(1) 设 a,b,c,d 都是整数,且 $m=a^2+b^2$,$n=c^2+d^2$,则 mn 也可以表示成两个整数的平方和,其形式是 $mn=$______.(1986 年全国初中数学联赛题)

(2) 已知 $1176a=b^4$,b 为自然数,a 的最小值是______.(1982 年上海市初中数学竞赛题)

(3) 已知 n 为自然数,且 $9n^2+5n+26$ 的值是两个相邻自然数之积,则 $n=$______.(1985 年上海市初中数学竞赛题)

(4) 有四个数①921438;②76186;③750235;④2660161,其中只有______是完全平方数.

(5) 使得 m^2+m+7 是完全平方数的所有整数 m 的积是______.(1989 年上海市初三数学竞赛题)

(6) 使得 $n^2-19n+91$ 为完全平方数的自然数 n 的个数是______.(1991 年北京市初中数学竞赛题)

(7) 自然数 n 减去 52 的差以及 n 加上 37 的和都是整数的平方,则 $n=$______.(1988 年全国初中数学通讯赛题)

(8) 若 m 是一个完全平方数,则比 m 大的最小完全平方数是______.(1990 年江苏省初中数学竞赛题)

(9) 三个连续自然数的平方和(填"是"或"不是"或"可能是")______某个自然数的平方.(第 1 届希望杯数学邀请赛初一试题)

(10) 一个两位数$\overline{xy}$减去互换数字位置后的两位数$\overline{yx}$所得之差恰是某自然数的平方,这样的两位数共有______个.(1990 年武汉市初二数学竞赛题)

(11) 有两个两位数,它们的差是 56,它们的平方数的末两位数字相同,则这两个数分别是______.(1991 年长沙市初中数学竞赛题)

(12) 若 p 为质数,且方程 $x^2+px-444p=0$ 的两根均为整数,则 $p=$______.(第 38 届美国中学生数学竞赛题)

(13) 恰有 35 个连续自然数的算术平方根的整数部分相同,那么这个相同整数等于______.(1990 年全国初中数学联赛题)

(14) 如果 x^2+x+2m 是一个完全平方式,则 $m=$______.(1989 年"五羊杯"初二数学竞赛题)

(15) 小于 1000 的正整数中,是完全平方数且不是完全立方数的数有______个.(1989 年"五羊杯"初二数学竞赛题)

(16) 设 $21x^2+ax+21$ 可分解为两个一次因式之积,且各因式的系数都是正整数,则满足条件的整数 a 共有______个.(1990 年江苏省初中数学竞赛题)

3. 两个正整数的和比积小 1000,并且其中一个是完全平方数,试求较大数与较小数之比.(1987 年北京市初二数学竞赛题)

4. 已知直角三角形的两直角边长分别为 l 厘米,m 厘米,斜边长

为 n 厘米，且 l,m,n 均为正整数，l 为质数，求证：$2(l+m+1)$是完全平方数.（1985 年上海市初中数学竞赛题）

5. 试证：12345678987654321 是完全平方数.

6. 求证：当 n 是非负整数时，$3^n+2\times17^n$ 不是完全平方数.（1991 年英国数学奥林匹克试题）

7. 求证：$1976^{15}+2$ 不是一个自然数的平方.（1976 年基辅数学竞赛题）

8. 按任意的次序把 1,2,…,1976 这 1976 个自然数写成一排，求证：所得到的数不是一个完全平方数.（1976 年基辅数学竞赛题）

9. 试证：和数$\underbrace{11\cdots1}_{m个}\times\underbrace{100\cdots05}_{m+1个}+1$ 是完全平方数.

10. 求证：凡是大于 4 的完全平方数，都可以用两个自然数的平方差来表示.

11. 求证：$a(a+1)+1$ 必是非完全平方数.

12. 求证：二奇数的平方和不是完全平方数.

13. 设三个整数 a,b,c 的最大公约数是 1，且满足条件 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$，求证：$(a+b)$，$(a-c)$和$(b-c)$都是完全平方数.（1989 年天津市“新蕾杯”初二数学竞赛题）

14. 试求出所有具有如下性质的两位数：它与将它的两位数字颠倒后所得的两位数的和是完全平方数.（第 8 届莫斯科数学奥林匹克试题）

15. 设 n 是整数，如果 n^2 的十位数字是 7，那么 n^2 的个位数字是多少？（1978 年第 10 届加拿大数学竞赛题）

16. 有若干名战士，恰好组成一个八列长方形队列，若在队列中再增加 120 人或从队列中减去 120 人后，都能组成一个正方形队列，问原长方形队列共有多少名战士？（1991 年天津市初中数学竞赛题）

17. 设有理数 a,b 满足等量关系式 $a^5+b^5=2a^2\cdot b^2$，求证：$1-ab$ 是一个有理数的平方.（1990 年安庆市初中数学竞赛题）

18. 求证：$\underbrace{11\cdots1}_{n个1}\underbrace{22\cdots25}_{n+1个2}=(\underbrace{33\cdots35}_{n个3})^2$.（1987 年杭州市初中数学竞赛题）

19. 求证：对于任意自然数 n，$\sqrt{8\underbrace{99\cdots9}_{n-1个}4\underbrace{00\cdots0}_{n-1个}1}+1$ 能被 $2\times3\times5$ 所整除.（1979 年河南省中学数学竞赛题）

20. 求证下列各数是完全平方数：

(1) $224\underbrace{99\cdots9}_{k-2个}1\underbrace{00\cdots0}_{k个}9$;

(2) $\underbrace{11\cdots1}_{n个}0\underbrace{88\cdots8}_{n个}9$;

(3) $\underbrace{44\cdots4}_{n个}\underbrace{22\cdots2}_{n个}5$;

(4) $3\underbrace{99\cdots9}_{n个}6\underbrace{00\cdots0}_{n个}1$;

(5) $1\underbrace{77\cdots7}_{n个}9\underbrace{55\cdots5}_{n个}6$;

(6) $7\underbrace{11\cdots1}_{n个}8\underbrace{22\cdots2}_{n个}4$;

(7) $7\underbrace{11\cdots1}_{n个}2\underbrace{88\cdots8}_{n个}9$.

21. 各位数字之和为(1)1983;(2)1984 的完全平方数是否存在？（1983 年基辅数学竞赛题）

22. 求证：形如 $10n+2$，$10n+3$，$10n+7$，$10n+8$ 的数都不是完全平方数.

23. 试求有多少个四位数，它加上 400 后就成为一个自然数.

24. 是否存在两个自然数 a，b，使得 a^2+2b 和 b^2+2a 同时都是完全平方数.

25. 试问数 1111 在什么进制中恰好表示一个平方数？

26. 试求四位的完全平方数，它的千位数是其十位数加 8，它的百位数是其个位数减 4.

27. 求出所有满足下列条件的两位数：它比用它的两个数码倒排后所得的数大一个完全平方数.

28. 求证：相继三个自然数中的最大一数的立方不能等于另两个数的立方和.（1909 年匈牙利数学奥林匹克试题）

29. 求出一切这样的二位数，在它的前面写上与它相邻的连续整数后，得到的四位数是一个完全平方数.

30. 设四位数 $\overline{abcd}=(5c+1)^2$，求 $\overline{abcd}$.

31. 设 n 是自然数，求证：n^2+n+2 不能被 15 整除.

32. 设 x,y,z 都是整数，且满足 $x^2+y^2=z^2$，求证：xy 能被 6 整除.

33. 求证：没有整数 x 和 y 满足 $x^2-3y^2=1997$.

34. 是否有正整数 m,n，满足 $m^2+1987=n^2$？

35. 是否有正整数 m,n，满足 $m^2+1986=n^2$？

36. 是否有正整数 m,n，满足 $m^2+1988=n^2$？

37. 给定 a，怎样求 b，使 a^2+b^2 是一个完全平方数？

38. 求证：四个连续的自然数的乘积不能表示成整数平方的形式.（1926 年匈牙利数学奥林匹克试题）

39. 假设 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 和 b 是满足关系式 $a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2=b^2$ 的整数，求证：所有这些数不可能都是奇数.（1931 年匈牙利数学奥林匹克试题）

40. 求证：方程 $a^2+b^2-8c=6$ 无整数解.（1969 年第 1 届加拿大数学竞赛题）

41. 用数码 1,2,3,4,5,6 各十个，随意排成一个六十位数 N，求证：N 不是完全平方数.

42. 给出数列 $1,3,5,7,\cdots,2k-1,\cdots$

(1) 计算此数列的第 991 项；

(2) 求证：$19\times10^4+a_{990}$，$1919\times10^4+a_{990}$，$\cdots$，$\underbrace{1919\cdots19}_{2m\text{位}}\times10^4+a_{990}$，$\cdots$都不是完全平方数.

（1981 年河南省高中数学竞赛题）

43. 求一个完全平方数 $\overline{xyzt}$，且适合 $x=y+z$，$x+z=10t$.

44. 求一个完全平方的四位数 $\overline{abcd}$，使 $\overline{ab}=\overline{cd}+1$.

45. 求所有的自然数 n，使得 $S_n=9+17+25+\cdots+(8n+1)$ 是一个完全平方数.

46. 如果 $f(x)=x^2+x$，求证：方程 $4f(a)=f(b)$ 没有正整数 a 和 b 的解.（1977 年加拿大第 9 届数学竞赛题）

47. 试证 $n(n\geqslant2)$ 个互不相等的正整数的倒数的平方和不能是整数.（1982 年上海市高中数学竞赛题）

48. 若 a,b 是正整数，求证：$\frac{a^4+b^4+(a+b)^4}{2}$ 是完全平方数.(1989 年安庆市初中数学竞赛题)

49. 求出所有满足 $S_1-S_2=1989$ 的完全平方数 S_1,S_2.(1989 年第 30 届 IMO 备选题)

50. 如果 n 为大于 1 的整数，且 $3n+1$ 是一个完全平方数，求证：$n+1$ 是三个正整数的完全平方数之和.

51. 求所求的正整数 n，使得 $n^3-18n^2+115n-391$ 是一个正整数的立方.

52. 设 n 是正整数，求证：$2n+1$ 和 $3n+1$ 都是完全平方数的充要条件是 $n+1$ 同时为两个相继的完全平方数之和以及一个完全平方数和其相邻完全平方数 2 倍之和.(1994 年澳大利亚数学奥林匹克试题)

53. 试求出所有的自然数 $k\geqslant 3$，使得 $\frac{1}{2}(k-1)k-1$ 是某质数 p 的方幂 $\left(即 \frac{1}{2}(k-1)k-1=p^n,n\in N\right)$.(1991 年安徽省数学奥林匹克学校招生试题)

54. 令 $\{x\}=x-[x]$.(1)找出一个实数 x，满足 $\{x\}+\left\{\frac{1}{x}\right\}=1$；(2)求证：满足上述等式的 x，都不是有理数.(1990 年全国初中数学联赛题)

55. 试求两个不同的自然数，它们的算术平均数 A 和几何平均数 G 都是两位数，其中 A,G 中一个可由另一个交换个位和十位数字得到.(1993 年浙江省初中数学竞赛题)

56. 若 x 和 y 都是自然数，试证：x^2+y+1 和 y^2+4x+3 的值不能同时都是完全平方数.(1992 年北京市初二数学竞赛题)

57. 设 $k_1<k_2<\cdots$ 是正整数，且没有两个是相邻的，又对于 $m=1,2,3,\cdots,S_m=k_1+k_2+\cdots+k_m$.求证：对每一个正整数 n，区间 $[S_n,S_{n+1})$ 中至少含有一个完全平方数.(1996 年上海市高中数学竞赛题)

58. k 为正整数，求证存在无限多个形如 $n\cdot 2^k-7$ 的平方数，这里 n 是正整数.(第 36 届 IMO 预选题)

59. 在黑板上按以下规则写了若干个数：第一个数是 1，其后的每一个数都等于已写数的个数加上这些已写数的平方和.求证：在黑板

上不可能出现除 1 以外的完全平方数.（第 26 届独联体数学奥林匹克试题）

60. 对任何整数 $n\geqslant 0$，令 $S(n)=n-m^2$，其中 m 是满足 $m^2\leqslant n$ 的最大整数. 数列 $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ 定义如下：$a_0=A$，$a_{k+1}=a_k+S(a_k)$，$k\geqslant 0$. 问对于哪些正整数 A，这个数列最终为常数？（1991 年第 52 届普特南数学竞赛题）

习题解答概要

习题一解答

1. (1) B. (2) D. (3) B. (4) C. (5) C. (6) C. (7) C. (8) B. (9) C. (10) A. (11) A. (12) B. (13) B.

2. 由于这13对数的差的和为0,所以不可能每对数的差都是奇数(原因是它们的和为奇数).于是至少有一对数的差为偶数,即13对数的差的积必为偶数.

3. 用反证法.设 $\Delta=b^2-4ac=1986=4k+2$(k 为正整数),这时 b^2 能被2整除,因而 b 为偶数,令 $b=2t$,$b^2=4t^2$ 且 $4t^2-4ac=4k+2$.这时等式左边的数被4整除,而右边的数不能被4整数,矛盾.

4. 由于 n 个实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中每一个不是+1就是−1,所以 n 个实数:$\frac{x_1}{x_2},\frac{x_2}{x_3},\cdots,\frac{x_n}{x_1}$ 中每一个不是+1就是−1.设其中有 a 个+1,b 个−1,$\therefore a+b=n$.又由 $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\cdots+\frac{x_n}{x_1}=0$,即 $a-b=0$,$\therefore a=b=\frac{n}{2}$.又由于 $\frac{x_2}{x_1}\cdot\frac{x_3}{x_2}\cdots\frac{x_n}{x_1}=1$,即 $1^a\cdot(-1)^b=1$,$\therefore b$ 为偶数,设 $b=2m$,则 $n=4m$.

5. 设 $x=a_{ij}$,$y=a_{pq}$,$a_{ij}\geqslant a_{iq}\geqslant a_{pq}$,$\therefore x\geqslant y$.(1)当 n 是奇数时,$x^n\geqslant y^n$;(2)当 n 是偶数时,(i)如果 $x\geqslant y\geqslant 0$,则 $x^n\geqslant y^n$;(ii)如果 $0\geqslant x\geqslant y$,则 $x^n\leqslant y^n$;(iii)如果 $x\geqslant 0\geqslant y$,则当 $x\geqslant -y$ 时,$x^n\geqslant y$ 时,$x^n\leqslant y^n$.

6. 设 $1980=a+(a+1)+\cdots+(a+n-1)$,即 $na+\frac{1}{2}n(n-1)=2^2\cdot 3^2\cdot 11\cdot 5$,故有 $n(2a+n-1)=2^3\times 3^2\times 11\times 5$.易知 n 与 $2a+n-1$ 有不同的奇偶性,由此可得 n,$2a+n-1$ 与 a 的取值如下表:

n	1	3	5	8	9	11	15	24	33	40	45	55	…	3960
$2a+n-1$	3960	1320	792	495	440	360	264	165	120	99	88	72	…	1
a	980	659	394	244	216	175	125	71	44	30	22	9	…	−1979

可知分解成连续正整数的分解法有12种,分解成含有负整数的分解法也有12种,共有24种不同的分解法.

7. 应用反证法,进行奇偶性分析.

8. 所列各数可表示为 $i(n-i)(i=1,2,\cdots,n-1)$,由于 $i(n-i)=-i^2+in=-\left(i^2-2\cdot\frac{n}{2}\cdot i+\frac{n^2}{4}\right)+\frac{n^2}{4}=\frac{n^2}{4}-\left(i-\frac{n}{2}\right)^2$.故当 $i=\frac{n}{2}$ 时,$i(n-i)$ 取最大

值，且最大值为$\frac{n}{2}\left(n-\frac{n}{2}\right)=\frac{1}{4}n^2$.

9. 由题设知：$A=0.a_1a_2\cdots a_na_{n+1}\cdots$中的$a_i$是$0,1,2,\cdots,9$中的数，而$a_1$是奇数，$a_2$是偶数，$a_3$是由$a_1+a_2$确定的，个位数必为奇数，以下类推，可知有如下规律：

$A=0.$<u>奇偶</u>奇<u>奇偶</u>奇<u>奇偶</u>奇……

因为$0,1,2,\cdots,9$这10个数字只能组成不同的<u>奇偶</u>数组25个，开首的不同<u>奇偶</u>数组，便决定了不同的A.另一方面，对于每一个A，至多在小数点后第26个奇偶组之后便开始循环，出现重复的<u>奇偶</u>组，因此，A必然是循环小数.

10. 因为$1,2,\cdots,99$中，奇数个数多于偶数个数，两面数字之和中必有一个是两面为奇数的情况，此时必然得到其和为偶数，99个和的乘积也必然是偶数.

11. 能.按题目规定的翻法，共翻了$1+2+3+\cdots+1993=1993\times997$(次)，平均每枚硬币翻动了997次，这是奇数.翻动奇数次的结果，必使硬币朝向相反，只要在翻动n个硬币时，选择翻动$1993-n$个硬币时所剩余的硬币，则每个硬币恰好都翻动了997次，故能使所有1993枚硬币都反了面，将原来朝下的一面都变成朝上.

12. 可表成两整数的平方和的奇数必是$4m+1$型，故不存在.

13. 设$n-48=m^2,n+41=l^2$，解得$m=\pm44,l=\pm45$，$\therefore n=48+44^2=1984$.

14. (1)分两种情况讨论：a,b一奇一偶，则a^2+b^2为奇数.可设$a^2+b^2=2k+1$，所以$a^2+b^2+k^2=(k+1)^2$.故可找到$c=k,d=k+1$，使$a^2+b^2+c^2=d^2$成立；a,b同为偶数，则a^2+b^2是4的倍数，可设$a^2+b^2=4m+4$，所以，$a^2+b^2+m^2=(m+2)^2$，故可找到$c=m,d=m+2$，使$a^2+b^2+c^2=d^2$成立.

(2) $\because ab$是奇数，$\therefore a,b$都是奇数.不妨设$a=2m+1,b=2n+1$，则$a^2+b^2=(2m+1)^2+(2n+1)^2=4m^2+4n^2+4m+4n+2$.可见$a^2+b^2$是偶数，但不能被4整除.如果存在$c,d$，使$a^2+b^2+c^2=d^2$成立，则$d^2-c^2=(d+c)(d-c)$应为偶数，即$d+c$与$d-c$应都是偶数，因此$a^2+b^2=d^2-c^2$必能被4整除，这就导致了矛盾.

15. 设五个格点为A_k，其坐标是$(x_k,y_k)(k=1,2,3,4,5)$.在五个整数x_1,x_2,x_3,x_4,x_5中至少有三个同是奇数或者同是偶数.不妨设三个整数为x_1,x_2,x_3，则x_1-x_3和x_2-x_3都是偶数.

$$\triangle A_1A_2A_3\text{的面积}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}\text{的绝对值}$$

$$=\frac{1}{2}\left|(x_1-x_3)(y_2-y_3)-(x_2-x_3)(y_1-y_3)\right|.$$

$\because y_2-y_3$ 和 y_1-y_3 都是整数，$\therefore (x_1-x_3)(y_2-y_3)-(x_2-x_3)(y_1-y_3)$ 是偶数，$\therefore \triangle A_1A_2A_3$ 的面积为整数.

16. 当原数列中 a_i 为奇数，偶数时，分别记 b_i 为 1，0，则得数列 $\{b_i\}$：1，1，0，1，0，1，1，0，0，1，0，0，0，1，1，1，1，0，1，0，…且 a_i 与 b_i 的奇偶性相同. 由观察及 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的定义可见，$\{b_n\}$ 从第 15 项开始出现循环，即 $b_i=b_i+15$. $\because 1985=15\times132+5$，$1986=15\times132+6$，…，$2000=15\times133+5$，$\therefore b_{1985}=b_5=0$，$b_{1986}=b_6=1$，…，$b_{2000}=b_5=0$，即在 a_{1935} 到 a_{2000} 的 16 项中，奇数，偶数各有 8 项. 由于偶数的平方能被 4 整除，奇数的平方被 4 除余 1，$\therefore a_{1985}^2+\cdots+a_{2000}^2$ 是 4 的倍数.

17. 研究以下 10 个七位数：

$a_1a_2a_3a_4a_5a_60$，$a_1a_2a_3a_4a_5a_61$，…，$a_1a_2\cdots a_69$，这里 $a_1,a_2,\cdots,a_6$ 为任意数字，且 $a_1\neq0$. 显然数字和为偶数的有 5 个. 第一个数字 a_1 可以取 9 个不同的值，a_2，a_3，…，a_6 中的每一个可以取 10 个不同的值，$\therefore$ 存在 $9\cdot10^5\cdot5=45\cdot10^5$ 个不同的七位数字，其数字和为偶数.

18. 当 n 为偶数时，$(2a+1)^n+(2b+1)^n=(4a^2+4a+1)^{\frac{n}{2}}+(4b^2+4b+1)^{\frac{n}{2}}$ 是奇数的 2 倍，不能被 2^n 整除，所以 $\left(a+\frac{1}{2}\right)^n+\left(b+\frac{1}{2}\right)^n$ 不可能是整数；当 n 为奇数时，$(2a+1)^n+(2b+1)^n=2(a+b+1)[(2a+1)^{n-1}-(2a+1)^{n-2}(2b+1)+\cdots+(2b+1)^{n-1}]$，这里第二个括号内有 n 个奇数项，它们的代数和为奇数，所以若 $\left(a+\frac{1}{2}\right)^n+\left(b+\frac{1}{2}\right)^n$ 是整数，必有 2^n 整除 $2(a+b+1)$，显然这样的整数 n 只有有限个.

19. 假设 $x=\frac{p}{q}$ 是方程的解，$(p,q)=1$，则方程可化为 $ap^2+bpq+cq^2=0$. 由已知 a,b,c 都为奇数. (1)当 p,q 都为奇数时，方程左边＝奇数，而右边为零，矛盾；(2)当 p,q 为一奇一偶时，可推知方程左边仍为奇数，矛盾.

20. 若 $5^n-12^m=7$，两边 mod4，得 $1\equiv3\pmod4$，这不可能. 若 $12^m-5^n=7$，而 m,n 中有一个大于 1，则另一个也大于 1，mod3 可得 $(-1)^{n+1}\equiv1\pmod3$，$\therefore n$ 为奇数，而 mod8 可得 $-5^n\equiv-1\pmod8$. $\because n$ 为奇数，上式导出 $-5\equiv-1\pmod8$. 矛盾！$\therefore m=1,n=1$ 是唯一的解.

21. 显然 x、y 的奇偶性相反. 若 $x=2n$，则 $y=2k+1$，$(2n)^2+(2k+1)^2=1983$，即 $4(n^2+k^2+k)=1982$，但 $4\nmid1982$，$\therefore$ 方程 $x^2+y^2=1983$ 没有整数解.

22. 设方程有整数解，则 y 应是奇数，可设为 $y=2k+1$，则 $2x^2-5(2k+1)^2=7$，整理得 $x^2-10k^2-10k=6$，可见 x 是偶数. 设 $x=2M$，则有 $2M^2-5k(k+1)=3$，因 $k(k+1)$ 是偶数，而两个偶数之差不可能等于奇数，因此等式不成立，原方程没有整数解.

23. 容易看出，若 m,n 同奇同偶，所给方程左边为偶数，而 1987 是奇数，矛

盾. 所以 m,n 一奇一偶，从而 $m+n$ 与 $m-n$ 都是奇数. 原方程为

$$4(m-n)^2+(m+n)^2+2n^2=1987. \quad ①$$

(i) 若 $n=2k, m-n=2l+1, m+n=2p+1$，由①式得 $4(2l+1)^2+(2p+1)^2+2(2k)^2=1987$，即

$$16(l^2+1)+4p(p+1)+8k^2+5=1987. \quad ②$$

$\because p(p+1)$ 是偶数，$\therefore 16(l^2+l)+4p(p+1)+8k^2$ 能被 8 整除，则②式可写成 $8M+5=1987$，但 1987 被 8 除余 3，故上式不可能成立.

(2) 若 n 为奇数时，类似可推出②式左边为 $8k+7$，矛盾，故满足要求的整数 m,n 不存在.

24. 设有正整数 x,y 使得 $5^x+2=17^y$，即 $(3\cdot 2-1)^x+2=(3\cdot 6-1)^y$，$\therefore 3k+(-1)^x+2=3l+(-1)^y$，即 $(-1)^x+2=3m+(-1)^y$. 若 y 为奇数，则 $(-1)^x=3(m-1)$，这不可能，$\therefore y$ 必须是偶数. 另一方面，由 $5^x+2=17^y=(5\cdot 3+2)^y=5M+2^y$，知 2^y-2 可被 5 整除，但 y 为偶数时，2^y-2 的末位数是 2 或 4，又得矛盾.

25. 由已知可知四数必是三奇一偶或一奇三偶，不论哪一种，四数之立方和为奇数，不可能为 120. 一般命题：如果偶数个正整数之和为奇数，则它们的幂之和必为奇数.

26. 回答是否定的. 可用奇偶性来证明：设横行或竖列内含 k 个黑色方格及 $8-k$ 个白色方格 $(0\leqslant k\leqslant 8)$. 当改变方格颜色时，即得 $8-k$ 个黑色方格和 k 个白色方格，因此，每进行一次操作，黑色方格数"增加了" $(8-k)-k=8-2k$ (即改变了一个偶数). 于是无论进行多少次操作，方格纸上黑色方格数目的奇偶性无变化. 所以原来 32 个黑色方格(偶数)进行操作后，最后还是有偶数个黑色方格，决不会得到恰有一个(奇数)黑色方格的方格纸.

27. 设十位数中，五个奇数位数字之和为 a，五个偶数位数字之和为 b $(10\leqslant a\leqslant 35, 10\leqslant b\leqslant 35)$，则 $a+b=45$. 又十位数能被 11 整除，则 $a-b$ 应为 0，11，22. 由于 $a+b$ 与 $a-b$ 有相同的奇偶性，经分析所求的十位数是 9876524130.

类似地，我们还可以求出由 0 到 9 十个不同数字组成的能被 11 整除的最小十位数为 1203465879.

28. 设小三角形的个数为 k，则 k 个小三角形共有 $3k$ 条边，减去 n 边形的 n 条边及重复计算的边数后共有 $\frac{1}{2}(3k-n)$ 条线段. 显然只有 k 与 n 有相同的奇偶性时，$\frac{1}{2}(3k-n)$ 才是整数.

29. 除 995 外，可将 1，2，…，1989 所有数分为 994 对：(1，1989)，(2，1988)，…，(994，996)，每对数中两个数的奇偶性相同，所以在每对数前无论放置"+"、"−"号，运算结果只能是偶数. 而 995 为奇数，所以数 1，2，…，1989 的总值是奇

数，于是所求的最小非负数不小于 1；数 1 可用下列方式求得：$1=1+(2-3-4+5)+(6-7-8+9)+\cdots+(1986-1987-1988+1989)$.

30. 设三个质数分别为 x,y,z，则 $x+y+z=\frac{xyz}{7}$，$\therefore x,y,z$ 中必有一个是 7. 若 $x=7$，则 $yz=y+z+7$，即 $yz-(y+z)=7$. 利用奇偶性分析求得 $y=5,z=3$.

31. 注意到一种袜子至多一只无配偶，而且，某一种颜色的袜子有一只无配对$\Leftrightarrow$该颜色的袜子取了奇数只. 当取出袜子总数是奇数时，最坏的可能是有三种颜色为奇数只，由此可知至少要取 23 只袜子.

32. 把第 i 行第 j 列的室记为 a_{ij}，转化的方法是利用相邻的室 $i+j$ 的奇偶性不同. 注意从一角 A 到其对角 B，B 为 a_{81}，A 为 a_{18}，$1+8$ 与 $8+1$ 都为奇数. 从 A 出发要穿过 64 道门才到达 B，每穿过一个门，$i+j$ 的奇偶性变化一次，变化 63 次不可能从奇数变到奇数，所以满足题设要求的路线不存在.

33. 用反证法. 若幻体存在，则相等的和为 42. 首先，幻体的每个面为三阶幻方. 如下左图，将幻方标为 9 个位置，不难证明：5 号位置只能排偶数. 事实上，若 5 号为奇，则 1，9 必须一奇一偶；设 1 号为奇，则 9 号为偶，从而 2，3 必一奇一偶；设 2 号为奇，3 号为偶. 依次推得 4 号为偶，6 号为奇，7 号为偶，这样，3，5，7 号位三数之和为奇数. 其次，3×3 幻方奇偶性分布只有两种可能：一种是六奇三偶，另一种是四奇五偶. 注意到 $1,2,\cdots,27$ 中共 14 个奇数，从而幻体的上、中、下三层幻方中有且只有一个是第一类的. 最后考虑每层幻方的 4 号位，三数中两偶一奇，其和不可能为 42.

偶	奇	奇
奇	偶	奇
奇	奇	偶

1	2	3
6	5	4
7	8	9

奇	偶	奇
偶	偶	偶
奇	偶	奇

34. 由已知有

$$11111(a-b)=ab+4\times617. \quad ①$$

$\because a>0,b>0$，$\therefore a-b>0$. 首先易知 $a-b$ 是偶数，否则 $11111(a-b)$ 是奇数，从而知 ab 是奇数. 进而知 a,b 都是奇数，知 $11111+a$ 及 $11111-b$ 都为偶数，这与已知矛盾. 其次，从 $a-b$ 是偶数及①知 ab 为偶数，进而知 a,b 都为偶数，从而 $ab+4\times617$ 是 4 的倍数，由①知 $a-b$ 是 4 的倍数.

35. 方程左边$=(x+2y)^2+6(x+2y)=(x+2y)(x+2y+6)$，故原方程为 $(x+2y)(x+2y+6)=1986$. 由于 $x+2y$ 和 $x+2y+6$ 同奇同偶，即 $(x+2y)(x+2y+6)$ 或者是奇数或者是 4 的倍数，而 1986 既不是奇数又不是 4 的倍数，$\therefore$ 原方程无整数解.

36. 假设 $f(x)=x^3+bx^2+cx+d$ 能分解为两个整系数多项式之积，则对所有实数 x 都有

$$x^3+bx^2+cx+d=(x+p)(x^2+qx+r). \quad ①$$

令 $x=1$，则

$$1+b+c+d=(1+p)(1+q+r). \quad ②$$

又由①有

$$pr=d, pq+r=c, p+q=b. \quad ③$$

$\because bd+cd=(b+c)d$ 是奇数，因此 $b+c$ 和 d 为奇数，又由 $pr=d$ 可得 p 和 r 为奇数. 考察②式，左边为 $1, b+c$ 和 d 的和，即三个奇数之和，而右边的 $1+p$ 为偶数，于是②式不可能成立，从而①式不成立. 即这个多项式不能分解成两个整系数多项式的乘积.

37. 设原式 $=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$，则

$$a+c=0, \quad ①$$

$$b+ac+d=1980, \quad ②$$

$$bc+ad=2000, \quad ③$$

$$bd=1990. \quad ④$$

由④，b,d 一奇一偶. 否则，要么 bd 为奇数，要么 bd 被 4 整除，都不可能等于 1990. 不妨设 b 为奇数，d 为偶数，考察方程③，因 d 为偶数，2000 为偶数，则 bc 为偶数，而 b 为奇数，所以 c 为偶数. 再考察②，已有 b 为奇数，c,d 都为偶数，可知 $b+ac+d$ 为奇数，这与 1980 为偶数矛盾.

38. 任三个数中必有两个同奇同偶，$\therefore x_1, x_2, \cdots, x_7$ 中必有三组同奇同偶的数组，设为 $x_1, x_2; x_3, x_4; x_5, x_6$. 这样 $y_1=\frac{x_1+x_2}{2}, y_2=\frac{x_3+x_4}{2}, y_3=\frac{x_5+x_6}{2}$ 都为整数，且它们中也必有两个同奇同偶，设为 y_1, y_2，于是 $x=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}$ 为整数，由此 $3^{x_1}\cdot 3^{x_2}\cdot 3^{x_3}\cdot 3^{x_4}=(3^x)^4$.

39. 由于 $n^m+1413=(m+n)^m\geqslant m^m+n^m$，$\therefore m^m\leqslant 1413$，$\therefore m\leqslant 4$. 若 m 为偶数，则不论 n 为奇数还是偶数，①式的左右两边一边为奇数，一边为偶数，都不可能成立，于是 m 为奇数，$m=1$ 或 3. 当 $m=1$ 时，则 $n+1=n+143$ 不可能成立；当 $m=3$ 时，则由 $(3+n)^3=n^3+1413$ 解得 $n=11$ 或 $n=-14$（舍去）. 于是，所求的所有正整数 m,n 为 $m=3, n=11$.

40. 由①得 $x=\frac{y-a}{2}\cdots$③，代入②并整理得 $3y^2=4b-a^2$，$(3y)^2=3(4b-a^2)\cdots$④. 假设 x,y 是满足①，②的有理数，则 x,y 也满足③，④. $\because a,b$ 是整数，$\therefore$

④式右边为整数，于是$(3y)^2$为整数，$\therefore 3y$也必是整数. 又由④式，$(3y)^2$是3的倍数，$\therefore 3y$也是3的倍数，$\therefore y$是整数. 以下证x是整数：由④式有$3y^2+a^2=4b^2$. $\because 4b$是偶数，$\therefore 3y^2$和a^2的奇偶性相同. $\because 3$为奇数，$\therefore y$和a的奇偶性相同，$\therefore y-a$为偶数，由③式，x为整数.

41. 设勾、股分别是质数p及$p+2$($p\neq 2$，否则$p+2=4$不是质数)，弦为正整数k. 由$p^2+(p+2)^2=k^2$，得$2p^2+4p+4=k^2$. 上式左边是偶数，故k为偶数. 设$k=2m$，得$2p^2+4p+4=4m^2$，即$p^2+2p+2=2m^2$. 又因p为奇数，这样，上式左端为奇数，而右端为偶数，这是不可能的.

42. 若n为奇数，则n^2为奇数. 又$n>2$，从而n^2+1，n^2-1为正偶数. 由恒等式$\left(\frac{n^2-1}{2}\right)^2+n^2=\left(\frac{n^2+1}{2}\right)^2$知结论成立；若$n$为偶数，则$n^2$为4的倍数，又$n>2$，从而$\frac{n^2}{4}$是大于1的整数. 由恒等式$\left(\frac{n^2}{4}-1\right)^2+n^2=\left(\frac{n^2}{4}+1\right)^2$知结论成立.

43. $\because a,b,c$为偶数，$\therefore a,b,c$必都含有因数2. $\because a,b,c$的最小公倍数为1988，将1988分解成质因数的连乘积. 由$a>b>c$知，a必含有质因数2与71；b必含有质因数2与7；c必含有因数2. 从而a可取$4\times 7\times 71$，$2\times 7\times 71$，4×71，2×71. 当a取诸a值中最小的一个值时，$a=2\times 71=142$. 从而b可取4×7，2×7；c可能取2×7，4，2. 故$(a,b,c)=(142,28,14)$，$(142,28,4)$，$(142,28,2)$，$(142,14,4)$，$(142,14,2)$.

44. 设$a_1+a_3+\cdots+a_{99}+a_{101}=P$，则$a_1+2a_2+\cdots+101a_{101}=P+(2a_2+4a_4+\cdots+100a_{100})+(2a_3+4a_5+\cdots+100a_{101})=P+2[(a_2+2a_4+\cdots+50a_{100})+(a_3+2a_5+\cdots+50a_{101})]$. 即$S=P+$偶数，而已知$S$是偶数，所以$P$是偶数.

45. 利用辅助命题"设n与m是两个奇偶性相同的正整数，则mn是n个连续奇数的和"证明.

46. 只须证$a^n+b^n+c^n$既可被2整除，又可被3整除. 因a^n与a，b^n与b，c^n与c分别具有相同的奇偶性，知$a^n+b^n+c^n$与$a+b+c$具有相同的奇偶性，因后者可被6整除，是偶数，知$a^n+b^n+c^n$也为偶数，可被2整除.

为证$a^n+b^n+c^n$可被3整除，可利用性质"若n为正奇数，k为正整数，则k^n与k被3除的余数相同". 现证此性质：设n是大于1的正奇数，则有$n-1=m\cdot 2^l$，其中l为正整数，m为正奇数. 于是$k^n-k=k(k^{m\cdot 2^l}-1)=k(k^{m\cdot 2^{l-1}}-1)(k^{m\cdot 2^{l-1}}+1)=k(k^{m\cdot 2^{l-2}}-1)(k^{m\cdot 2^{l-2}}+1)(k^{m\cdot 2^{l-1}}+1)$. 这个分解过程可以一直进行下去，得到$k^n-k=k(k-1)(k+1)\cdot p$，其中$p=(k^{m-1}+k^{m-2}+\cdots+1)\cdot$

$(k^{m-1}-k^{m-2}+\cdots+1)(k^{m\cdot 2}+1)(k^{m\cdot 2^2}+1)\cdots(k^{m\cdot 2^{l-1}}+1)$. 由于 $k-1,k,k+1$ 是 3 个连续整数，其中一定有一个是 3 的倍数，所以 k^n-k 可被 3 整除，亦即 k^n 与 k 被 3 除的余数相同.

47. 因 2^n 仅含有因子 2，不含有任何大于 1 的奇数因子，但若干个连续整数之和为

$$m+(m+1)+\cdots+(m+k)=\frac{1}{2}(2m+k)(k+1),$$

由于 $2m+k$ 与 $k+1$ 具有不同的奇偶性，所以其中必有一个（大于 1 的）奇数因子，$\therefore 2^n$ 不可能表示为若干个连续整数的和. 设 r 为奇数，则 $\frac{1}{2}(r+1)$ 与 $\frac{1}{2}(r-1)$ 是两个连续整数，且有 $r=\frac{1}{2}(r+1)+\frac{1}{2}(r-1)$. 设 r 为偶数，但 $r\neq 2^n$，则存在奇数 $p>1$，和正整数 l，使 $r=p\cdot 2^l$，于是有

$$r=\frac{1}{2}[(p+1)+(p-1)+(p+3)+(p-3)+\cdots$$
$$+(p+2^{l+1}-1)+(p-2^{l+1}+1)],$$

其中 $\frac{1}{2}(p-2^{l+1}+1),\frac{1}{2}(p-2^{l+1}+3),\cdots,\frac{1}{2}(p-1),\frac{1}{2}(p+1),\cdots,\frac{1}{2}(p+2^{l+1}-1)$ 是 2^{l+1} 个连续整数.

48. 因 $a[(a+d)-(b+c)]=a^2+ad-ab-ac=(a-b)(a-c)>0$，知 $a+d>b+c$，即 $2^k>2^m$，$k>m$. 又 $ad=bc$，即 $a(2^k-a)=b(2^m-b)$，移项后得 $2^m(b-2^{k-m}a)=b^2-a^2=(b+a)(b-a)$. 因为 a,b 为奇数，所以 $b-2^{k-m}a$ 也为奇数，$b+a$ 与 $b-a$ 为偶数. 另外 $b+a$ 与 $b-a$ 不可能都是 $4k$ 型或都是 $4k+2$ 型偶数，否则它们的差应为 4 的倍数，但 $(b+a)-(b-a)=2a$ 不是 4 的倍数. 这就是说 $b+a$ 和 $b-a$ 中有一个为 $4k+2$ 型的数，将该数记作 x，由于 $2^{m-1}\leqslant x\leqslant b+a<b+c=2^m$，可见 $x=2^{m-1}$. 于是

$$\begin{cases}b+a=2^{m-1},\\ b-a=2(b-2^{k-m}a),\end{cases}\quad \text{或}\quad \begin{cases}b+a=2(b-2^{k-m}a),\\ b-a=2^{m-1}.\end{cases}$$

解得 $a\cdot 2^{k-m+1}=2^{m-1}$. 因 a 为奇数，故只可能 $a=1$.

49. 设各三角形三边上的号码和分别为 $S_1,S_2,\cdots,S_{1000}$，则当 $S_1=S_2=\cdots=S_{1000}=S$ 时，$1000S=S_1+S_2+\cdots+S_{1000}=3(1+2+\cdots+1000)=\frac{3}{2}\cdot 1000\cdot 1001$，得 $2S=3003$，矛盾！所以找不到这样的编号法.

50. 因每次变换改变表中 6 个数的符号，而 $(-1)^6=1$，所以每次变换不会改变所变动的那行（或列）中 6 个数的乘积之符号，从而也不改变全表中 36 个数乘积之符号. 这样，无论操作多少次变换，表中 36 个数之积总是负的. 但全表中所有数为正时，36 个数之积为正.

51. 用反证法. 将 M 中的元素用点表示，如果 $y \neq x$ 且 $y \in H_x$，就在 x, y 之间连一线段，由条件(ii)知这条线段也表示 $x \in H_y$.

若 H_x 中元素的个数是偶数，因为由条件(i) $x \in H_x$，故从 x 引出的线段必是奇数条. 现设所有 H_x 中元素的个数都是偶数，那么从 M 中每一点引出的线段的条数的总和为 k=奇数个奇数之和=奇数. 另一方面，由于每条线段连接 M 中的两个点，所以 k 是图中所有线段的 2 倍，必是偶数，矛盾.

52. 若某行有一个异色格相叠，则该行至少还有一个异色格相叠. 否则，相叠两行蓝色小方格数之和为奇数，从而必有一张表上有一行蓝色小方格为奇数，与题设矛盾.

同理，某列有一个异色格相叠，则该列至少还有一个异色格相叠.

53. 设 $a_i(i=1,2,\cdots,m)$ 是互不相同的正偶数，$b_j(j=1,2,\cdots,n)$ 是互不相同的正奇数，且

$$a_1+a_2+\cdots+a_m+b_1+\cdots+b_n=1987.$$

由 $a_1+\cdots+a_m$ 是偶数，1987 是奇数，知 n 为奇数. $\because a_i$ 互不相同，故

$$a_1+a_2+\cdots+a_m \geqslant 2+4+\cdots+2m=m(m+1).$$

同理 $$b_1+b_2+\cdots+b_n \geqslant 1+3+\cdots+2(n-1)=n^2,$$

$$\therefore m^2+mn+n^2 \leqslant 1987, \text{即} \left(m+\frac{1}{2}\right)^2+n^2 \leqslant 1987+\frac{1}{4}.$$

于是问题归结为在这个条件下求 $3m+4n$ 的最大值. 由平均不等式，易得

$$3\left(m+\frac{1}{2}\right)+4n \leqslant \sqrt{3^2+4^2} \cdot \sqrt{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2+n^2} \leqslant 5\sqrt{1987+\frac{1}{4}},$$

$$\therefore \quad 3m+4n \leqslant 5\left[5\sqrt{1987+\frac{1}{4}}-\frac{3}{2}\right], 3m+4n \leqslant 221.$$

另一方面，当 $m=27, n=35$ 时，有 $3m+4n=221$ 且满足条件 $m^2+m+n^2 \leqslant 1987$，故所求最大值为 221.

54. 设四位偶数为 $\overline{abcd}$，则 $a=4, 5, 6$. $d=0, 2, 4, 6, 8$. 当 d 取 0, 2, 8 时，a 可取 4, 5, 6. 此时有 $3\times3\times8\times7$ 个符合题设的数. 当 d 取 4 或 6 时，a 可取 6 或 4，此时有 $2\times2\times8\times7$ 个符合题设的数，故共有 $3\times3\times8\times7+2\times2\times8\times7=728$ 个数.

55. 将集 E 中的数分成 100 个数对：$(2p, 201-2p)(p=1,2,\cdots,100)$. 由条件(i)，每一对数不能同属于集 G. 但 G 有 100 个数，所以上述每一对中必恰有一个数属于 G，易知这样的 100 个数满足条件(i). 试取 E 中所有偶数，则其和为 $\frac{1}{2}\times100\times(2+200)=10100>10080$，这说明 G 不能全由偶数组成. 试将 k 个偶数 $2p_1, 2p_2, \cdots, 2p_k$ 换成奇数 $201-2p_1, 201-2p_2, \cdots, 201-2p_k$，使新的 100 个数总

和为 10080，即 $10100-\sum_{i=1}^{k}2p_i+\sum_{i=1}^{k}(201-2p_i)=10080$，亦即

$$20-4\sum_{j=1}^{k}p_i=-201k. \quad ①$$

上式左边是 4 的倍数，右边 201 与 4 互质，所以 G 中奇数个 k 是 4 的倍数. G 中各数平方和为 $\sum_{i=1}^{100}(2i)^2-\sum_{i=1}^{k}(2p_i)^2+\sum_{i=1}^{k}(201-2p_i)^2=4\sum_{i=1}^{}i^2+201\left(201k-4\sum_{i=1}^{k}p_i\right)=4\cdot\frac{1}{6}\cdot100\cdot101\cdot201-201\cdot20=1349380.$

56. 设 n 可以表示成 m 个连续正整数之和. 令 $n=k+(k+1)+\cdots+[k+(m-1)]$，则

$$n=mk+\frac{m(m-1)}{2}=m\left(\frac{2k+(m-1)}{2}\right). \quad ①$$

(1) 若 m 为奇数，则 $m-1$ 为偶数，从而由①知 $m|n$，且 $\frac{m(m-1)}{2}<n$. 则

$$m<\frac{1+\sqrt{1+8n}}{2}. \quad ②$$

反之，由上述推理知，对 n 的每个满足②的奇因数 m，相应有 n 的一个表达式

$$n=k+(k+1)+\cdots+[k+(m-1)].$$

(2) 若 m 是偶数，把②改写成 $2n=m(2k+m-1)$. 由于 $2k+m-1$ 是奇数，所以 m 是 $2n$ 的偶因数，且满足条件：若 $2^{p_0}\parallel n$，则 $2^{p_0+1}\parallel m$. 这里符合 $2^{p_0}\parallel n$ 的含义是：$2^{p_0}|n$，但 $2^{p_0+1}\nmid n$. 此外，与(1)相同，m 还应满足(2). 反之，对于每个满足上述条件的 m，相应有 n 的一个表达式 $n=k+(k+1)+\cdots+[k+(m-1)]$.

综上讨论，若对每个 $n\in N$，记所求的表示为和的方法总数为 $f(n)$，则 $f(n)=f_1(n)+f_2(n)$，其中 $f_1(n)$ 是 n 的满足不等式②的因数的个数；$f_2(n)$ 是 n 的满足②且满足条件：若 $2^{p_0}\parallel n$，则 $2^{p_0+1}\parallel m$ 的偶因数 m 的个数.

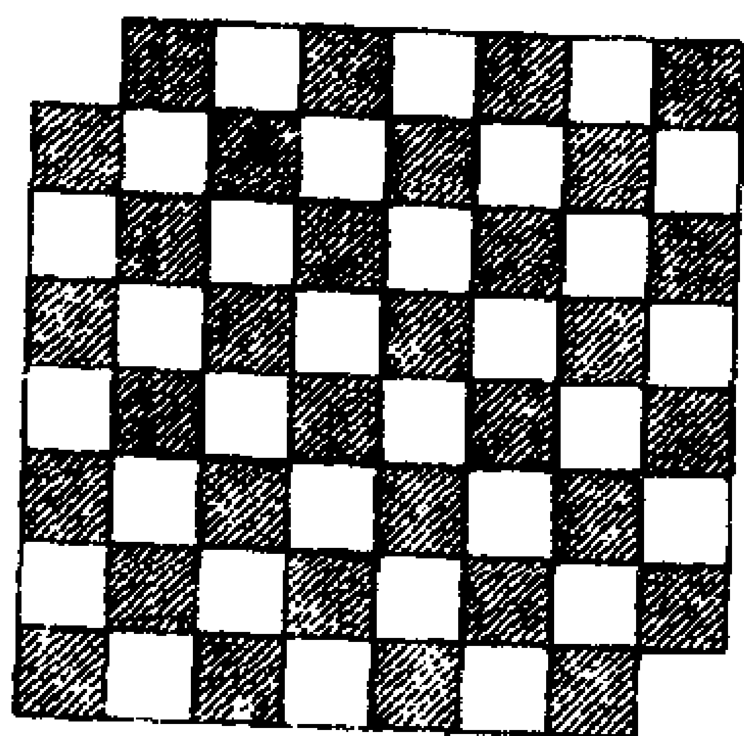
57. 由所设有 $(n+2)a_{n+1}=na_n+2(n+1)^{2r}$，两边同乘以 $n+1$，得 $(n+2)(n+1)a_{n+1}=(n+1)na_n+2(n+1)^{2r+1}$. 令 $b_n=(n+1)na_n(n=1,2,\cdots)$，便得 $b_{n+1}=b_n+2(n+1)^{2r+1}(n=1,2,\cdots)$，或 $b_k-b_{k-1}=2k^{2r+1}(k=2,3,\cdots)$，$\therefore b_n=\sum_{k=2}^{n}(b_k-b_{k-1})+b_1=\sum_{k=2}^{n}2k^{2r+1}+2(\because b_1=(1+1)\times1\times a_1=2)=2\sum_{k=1}^{n}k^{2r+1}=2n^{2r+1}+\sum_{k=1}^{n-1}k^{2r+1}+\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)^{2r+1}=2n^{2r+1}+\sum_{k=1}^{n-1}[k^{2r+1}+(n-k)^{2r+1}]$. 注意到 $2r+1$ 是奇数，故 $k+(n-k)|k^{2r+1}+(n-k)^{2r+1}$，即 $n|k^{2r+1}+(n-k)^{2r+1}$，$\therefore n|b_n$. 再将 b_n 改

写成 $b_n=\sum_{k=1}^{n}k^{2r+1}+\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)^{2r+1}=\sum_{k=1}^{n}[k^{2r+1}+(n+1-k)^{2r+1}]$，即得 $n+1|b_n$. 由于 $n,n+1$ 互质，故 $n(n+1)|b_n$，从而 $a_n=\frac{b_n}{n(n+1)}(n=1,2,\cdots)$ 是正整数.

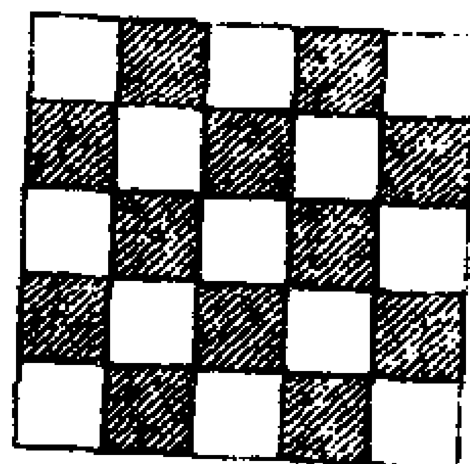
可用数学归纳法证明 a_n 为偶数.

习题二解答

1. 将图涂成黑白相间的两色图，因为每个 1×2 的矩形由 1 个黑格和 1 个白格构成，但黑格数 32，白格数 30，所以必有两个黑格无白格与之配对，故不能得到 31 个这样的矩形.



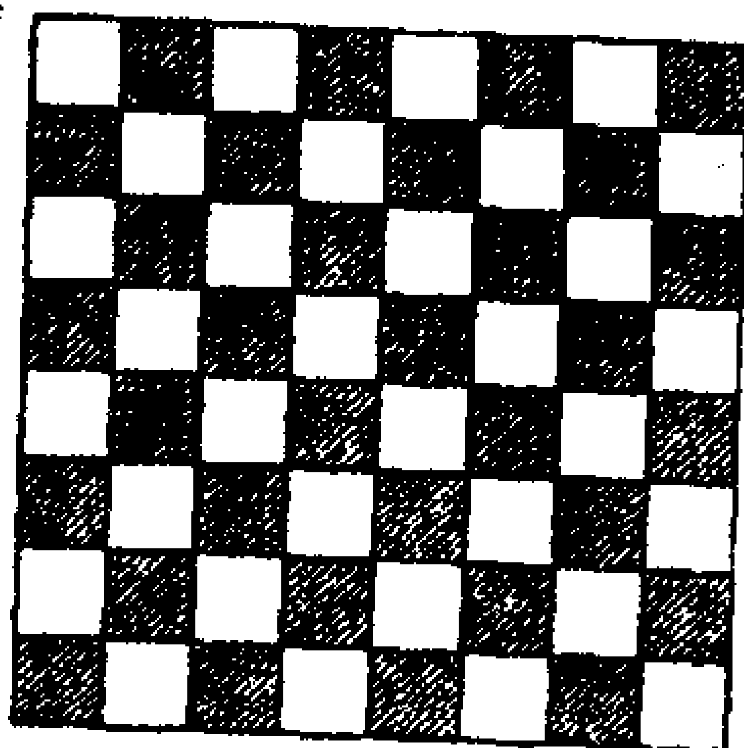
（第 1 题图）



（第 2 题图）

2. 将教室座位画成如图所示的形状，每个方格代表一个座位，并将方格涂成黑白相间的两色图. 按题意换位后学生的座位的颜色一定变化，由于黑白座位个数不同，黑格数为 12，白格数为 13，故这样的换位法是不存在的.

3. 如图，国际象棋的棋盘中的 64 个小方格可分成黑白相间的两色图，左下角与右上角都是黑色的. 按马的跳法，如果原来在黑格中，跳一步便到了白格，而从白格跳一步又到黑格中. 从左下角起跳，跳奇数步应跳到白格，跳偶数步应跳到黑格.



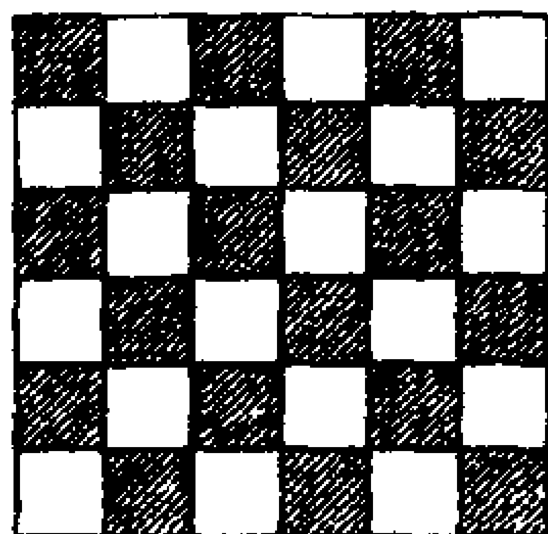
（第 3 题图）

假设马按题意要求跳到右上角的方格中，则马应跳 63 步，第 63 步应跳到白格，但右上角为黑格，矛盾. 故符合本题要求的跳法不存在.

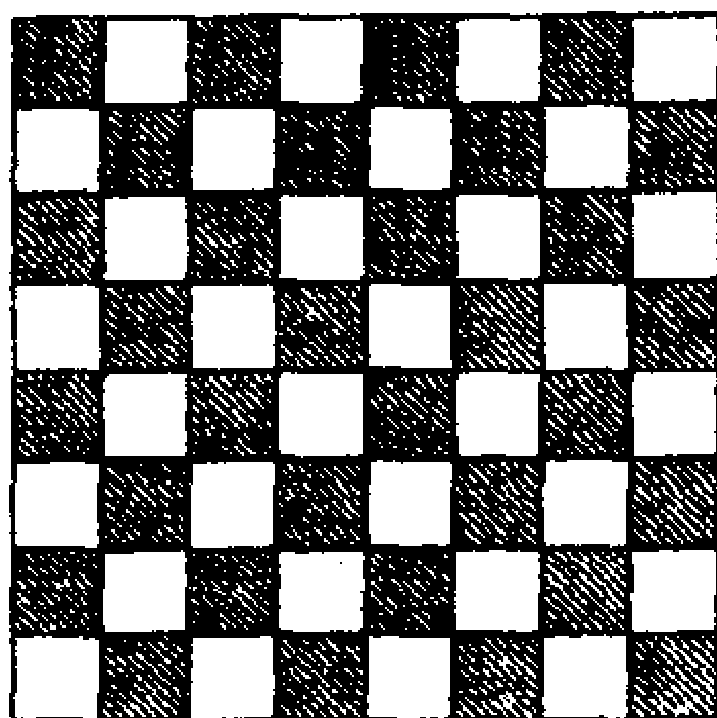
4. 在棋盘上每一交点处涂上黑白相间两种颜色. 马从任一点跳起，跳奇数步终点与起点颜色相异；马从任一点出发，跳至它的相邻点，颜色自然不同，故必经过奇数步.

5. 把仅仅具有公共门的两个六边形房间称为相邻房间，把相邻房间涂成黑白两色.

6. 将 6×6 的棋盘相邻两格涂成黑白两色，如图所示，1 块拐角板盖住的方格为二白一黑或二黑一白；1 块 3×1 的矩形板盖住的方格为二白一黑或二黑一白，11 块 3×1 的矩形板可盖住的方格为 22 白 11 黑或 22 黑 11 白. 而图中小方格为 18 白和 18 黑，所以，无论怎样铺盖不能满足题设要求.



（第 6 题图）



（第 7 题图）

7. 不能. 只要将 8×8 的棋盘按图中方法染成黑白二色即可证明. 如果 15 个 T 字形与 1 个田字形能够覆盖这个棋盘，那么每个 T 字形覆盖奇数个（1 个或 3 个）白格，从而 15 个 T 字形覆盖奇数个白格（因为 15 个奇数的和是奇数）. 1 个田字形覆盖 2 个白格. 因而，15 个 T 字形与 1 个田字形所覆盖的白格数必定是奇数. 但棋盘中，白格的个数为偶数（32 个），因此 15 个 T 字形与 1 个田字形不能覆盖整个棋盘.

8. 剪去左上角的方格后，棋盘不能用 21 个 3×1 的矩形覆盖. 将棋盘涂上三种颜色，如图用数字 1,2,3 分别表示第一，二，三种颜色. 如果能用 21 个 3×1 的矩形将剪去左上角的棋盘覆盖，那么每个 3×1 的矩形盖住第一，二，三种颜色的方格各 21 个. 然而棋盘（剪去左上角后）却有第一种颜色的方格 20 个，第二种颜色的方格 22 个，第三种颜色的方格 21 个. 因此，剪去左上角的棋盘无法用 21 个 3×1 的矩形覆盖. 由此，如果剪去一个方格后，棋盘能用 21 个 3×1 的矩形覆盖，那么剪去的方格一定是图中涂第二种颜色的方格. 只要剪去第三行第 3 个、第三行第 6 个，第六行第 3 个，第六行第 7 个，这四个方格中的某一个，剩下的棋盘才有可能用 21 个 3×1 的矩形覆盖.

1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3

（第 8 题图）

9. 每个这种纸片由 6 个方格组成，所以 $6|mn$，可以设 n 是偶数，采用例 17 的涂色法，设有 x 个这种纸片盖住 4 个红格 2 个蓝格，y 个这种纸片盖住 4 个蓝格 2 个红格. 则由于红格与蓝格个数相等，所以 $4x+2y=4y+2x$，从而 $x=y$. 这种纸片的个数为偶数 $2x$，因而 $12|mn$.

10. 不能. 证明与例 17 类似，将第一，三，五，七列涂红色，其余列涂蓝色即可证明.

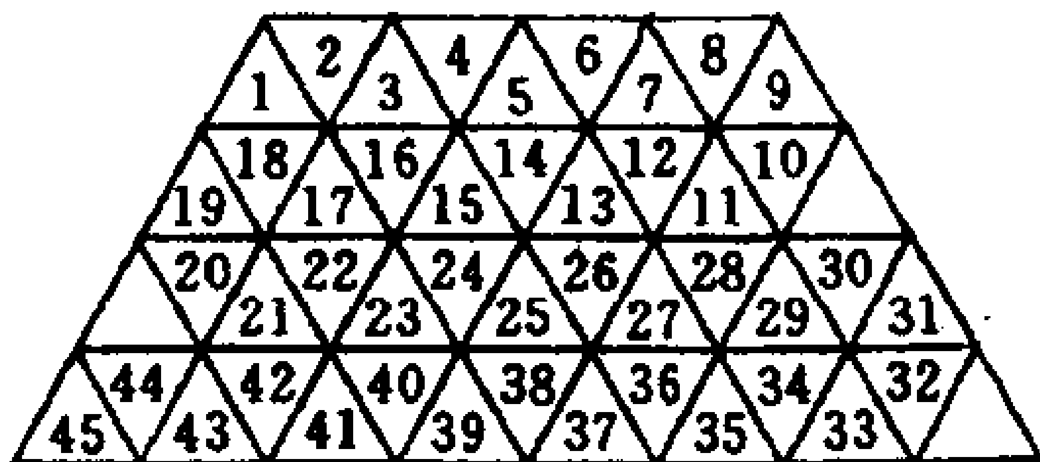
11. 用 T 字形能恰好覆盖 8×8 的棋盘，容易用构造法证明. 不能用 T 字形恰好覆盖 10×10 的棋盘，采用自然涂色法，即将相邻格分别涂上红、蓝两色，则红、蓝格各有 50 个. 如果用 T 字形能恰好覆盖棋盘，设其中有 x 个覆盖 3 个红格 1 个蓝格，y 个覆盖 3 个蓝格 1 个红格，所以，$3x+y=3y+x$，$x=y$，并且 $4x=50$，但此式显然不能成立（$\because 4\nmid 50$）.

1	2	3			
3	4	1			
1	2	3			
3	4	1			
1	2	3			
3	4	1			

（第 12 题图）

12. 假设第一行的格子中至少有三种不同的颜色，不失一般性，对第一行的三个相连的小格子着三种不同的颜色，用 1，2，3 表示（如图）. 在第一行下面，对相邻或对角的小方格必须着第 4 种颜色，如在 2 下面用 4 表示. 这样在第一行标 1 的下面必须着色 3，在标 3 的下面必须着色 1. 同理，在第二行标 4 的下面只能着色 2，在标 3 的下面着色 1，在标 1 的下面着色 3. 继续按此法着色，直到最后一行. 不难看出，这三列中的每一列都只出现两种不同的颜色.

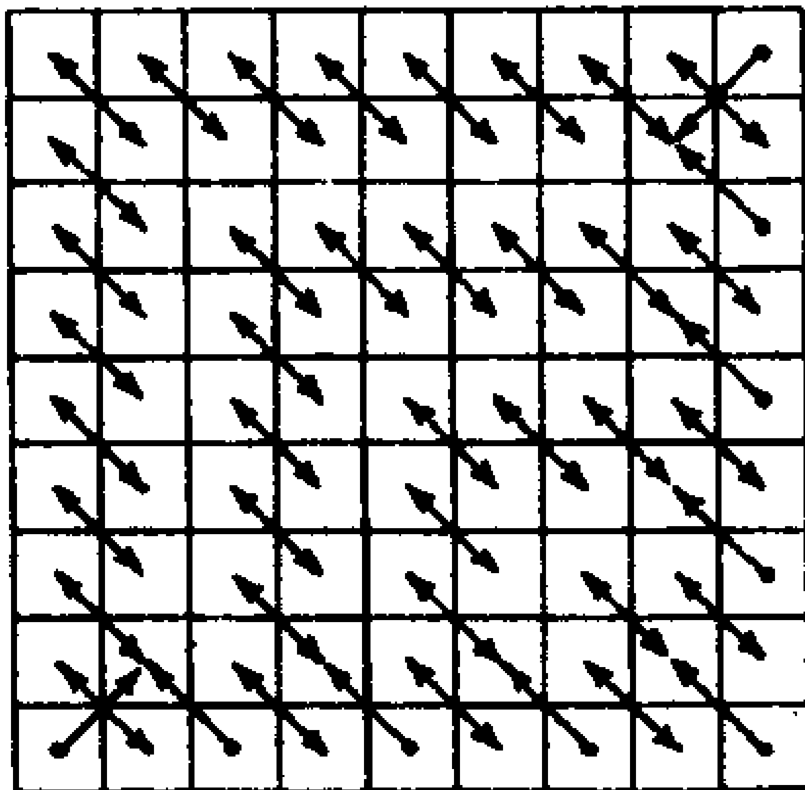
13. (1)标号如图.



（第 13 题图）

(2) 把每个小三角形染上黑白二色之一，使具有相邻边的三角形涂色不同，两种颜色的三角形数目之差为 n，而相邻号码的三角形中，两者数目之差为 0 或 1，则必然有 n 或 $n-1$ 个三角形没有标号，故在这 $3n^2$ 个三角形中至少有 $n-1$ 个三角形不能按上述要求标号.

14. 设蓝色格 A 与第二张纸上的红色格 A' 重合，当在第一张纸上 A 所占的列中，其余的蓝色格（它有奇数个）均与第二张纸的蓝格重合，而第二张纸在这一列的蓝色格的个数为偶数，所以必有一蓝格与第一张纸上的红格重合. 即在这一列，第一张纸上有一方格 B 与第二张纸上不同颜色的方格 B' 重合. 同理可证：在 A 与 B 所在的行上各有一个方格 C，D，与第二张纸上的方格 C'，D' 重合. 但它们的颜色与 C，D 不同. 即命题得证.

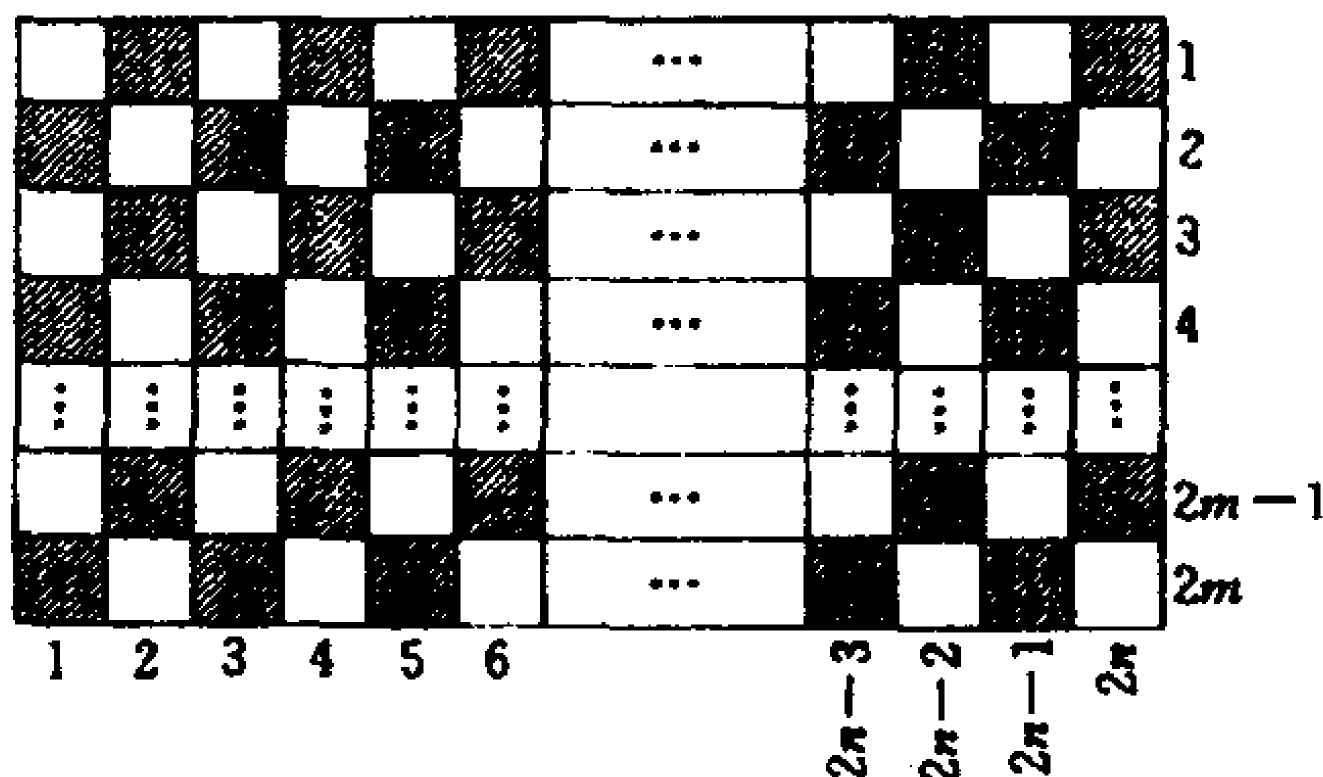


（第 15 题图）

15. 空格数最少是 9. 将棋盘按列从左到右依次相间涂成黑、白两色. 这样便有 45 格是黑的，36 格是白的. 依题意黑格中的甲虫爬到白格中；而白格中的甲虫爬到黑格中. 所以，白格中的 36 只爬到

黑格中，在 45 个黑格中至少有 9 格是空的. 上图所示为空格恰好为 9 的情况.

16. 将 $2m\times2n$ 的方格纸间隔涂成黑白两色. 剪去左上角和右下角的两个方格，即减少了两个白格. 而每个 1×2 的矩形必由 1 个黑格和 1 个白格组成. 所以，不能沿格线剪成完全是 1×2 的矩形纸片.



（第 16 题图）

17. 利用间隔涂色法知，题设要求的走法不存在.

18. 9 名数学家用点 $A_1,A_2,\cdots,A_9$ 来表示，两人能通话者，用线段连结，并染上某种颜色，以表示相同语种；两人不通话者不连线. (1) 当任意两点都有连线并染有颜色，那么有一点如 A_1，以 A_1 为一端点的 3 条线段中至少有两条同色，如 A_1A_2，A_1A_3，由此可知 A_1,A_2,A_3 之间可用同一语言通话. (2) 当(1)的情况不发生，则至少有两点不连线，如 A_1,A_2. 由条件知，其余七点必与 A_1 或 A_2 有连线. 这时七条线段中，必有四条是从某一点如 A_1 引出的，而这四条中又必有三条同色. 于是问题得证.

习题三解答

1. 用 (i,j) 表示第 i 行第 j 列的格，赋 (i,j) 以数 $(-1)^{i+j}$. 每行一步应乘以 -1，经 1995 步后，棋子由 $(-1)^{1+1}$ 移动 $(-1)^{1+1}\cdot(-1)^{1995}=(-1)^{1995}\neq(-1)^{8+8}$.

2. 可直接拼成.

3. 略.

4. 赋第 i 行第 j 列的格 (i,j) 以 $(-1)^{i+j}$，每块骨牌盖住两个异号格，所有骨牌盖住的正格数和负格数相同. (i) 若去掉的是两个同号格，则余下的正号格数与负号格数不等，这时不能被盖住；(ii) 若去掉的是两个异号格，当棋盘不断开时，总可以盖住.

5. 仿例 13 证明.

6. 仿例 17 证明.

7. 仿例 21，$C_{p+q+1}^{p+1}(p+1-q)/(p+1+q)$.

8. 仿例 12.

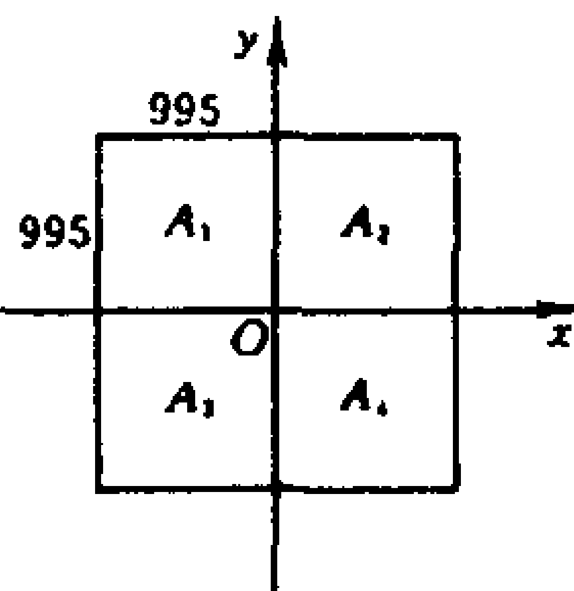
9. 先考虑 A 负的局数．A 每负一局，若这局不是末局，它就对应着 B 与 C 共胜 2 局（即 B 或 C 胜 A 的这局及由 B、C 比赛的下一局）．若 A 负末局，则这一局只对应着 B 与 C 共胜 1 局．又若 A 首局未打，则 B 或 C 在首局的这一局未被 A 的负局对应，则得计算公式：

$$B\text{ 胜局数}+C\text{ 胜局数}=A\text{ 负局数}\times 2+\varepsilon_1-\varepsilon_2,$$

其中 $\varepsilon_1=\begin{cases}0, & \text{当 } A \text{ 打首局时},\\ 1, & \text{当 } A \text{ 不打首局时};\end{cases}$ $\quad\varepsilon_2=\begin{cases}0, & \text{当 } A \text{ 末局不负时},\\ 1, & \text{当 } A \text{ 末局负时}.\end{cases}$

所以 $12+16=28=A$ 负局数 $\times 2+(\varepsilon_1-\varepsilon_2)$．由此可见 $\varepsilon_1-\varepsilon_2$ 应为偶数，又 $\varepsilon_1-\varepsilon_2$ 的可能值为 $-1,0,1$，所以只能是 $\varepsilon_1-\varepsilon_2=0$．于是得 A 负 14 局，共打了 $10+14=24$ 局．同理，B 负 13 局，共打了 25 局；C 负 11 局，共打了 27 局.

10. 可证这是不可能的．将表中黑格都标上 $+1$，白格都标上 -1．通过方格表的中心 O 引横轴和纵轴（如图），将方格表分为 4 个 995×995 的方格表．由于这 4 个方格表中都有奇数个方格，所以它们中所标数字之和 A_1, A_2, A_3, A_4 都不等于 0．但由标数方法知，有 $A_1+A_4=0$，$A_2+A_3=0$，因此，A_1 与 A_4 互为相反数，A_2 与 A_3 互为相反数．不妨设 $A_1>0$．若 $A_2>0$，则 $A_1+A_2>0$，于是有某些列中黑格多于白格．当 $A_2<0$ 时，也可作类似讨论．所以，不可能染得使每一行和每一列中黑格和白格的数目都相等.



11. 因每次变换改变表中 6 个数的符号，而 $(-1)^6=1$，所以每次变换不会改变所变动的那行（或列）中 6 个数的乘积，从而也不会改变全表中 36 个数的乘积．开始时表中有 19 个负数，全表中 36 个数的乘积为 $-a_{11}a_{12}\cdots a_{66}$，这样，无论作多少次变换，表中 36 个数的乘积恒为 $-a_{11}a_{12}\cdots a_{66}$．这就说明了无论经过多少次变换，都不可能把表中的数全变为正数.

习题四解答

1. (1)是，在实数范围内；(2)是，在有理数范围内；(3)不是.

2. 3.

3. $k=\dfrac{a+c\pm\sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2}$.

4. 要使已知二次三项式是完全平方式，则 $2k-1>0$，$\Delta=0$，解得 $k=1$.

5. 将原式整理成关于 x 的二次三项式，得 $3x^2+2(a+b+c)x+ab+bc+ca$，因此式是完全平方式，所以 $\Delta=0$，从而推出 $a=b=c$.

6. 因为 x^2+px+q 是完全平方式，所以 $p^2-4q=0$. 将 $p^2=4q$ 代入待证式的判别式中，知 $\Delta=0$.

7. 仿例 11 证明，或利用待定系数法进行证明.

8. $kx^2-2xy+3y^2+3x-5y+2=kx^2+(3-2y)x+(3y^2-5y+2)$，原多项式能分解为两个一次因式的积，必须使 $kx^2+(3-2y)x+(3y^2-5y+2)$ 的判别式为完全平方式，即 $\Delta_x=4(1-3k)y^2+4(-3+5k)y+(9-8k)$ 为完全平方式，则

$$\begin{cases}1-3k>0,\\ [4(-3+5k)]^2-16(1-3k)(9-8k)=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k<\dfrac{1}{3},\\ k^2+5k=0.\end{cases}$$

$\therefore k=-5$ 或 0. $\because k<\dfrac{1}{3}$，$\therefore k=-5$. 当 $k=-5$ 时，多项式 $-5x^2-2xy+3y^2+3x-5y+2=(x+y-1)(-5x^2+3y-2)$.

9. $\because x^2+2kxy+8y^2-3x+6y+2=x^2+(2ky-3)x+(8y^2+6y+2)$，若多项式能分解成两个一次因式之积，则 $x^2+(2ky-3)x+(8y^2+6y+2)$ 的判别式必须为一个完全平方式，即 $\Delta_x=(2ky-3)^2-4(8y^2+6y+2)=4(k^2-8)y^2-12(k+2)y+1$ 为完全平方式，则 $k^2-8>0$ 且 Δ_x 的判别式 $\Delta_y=0$，即

$$\begin{cases}k^2-8>0,\\ [-12(k+2)]^2-16(k^2-8)=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k^2-8>0,\\ 2k^2+9k+11=0.\end{cases}$$

$\because$ 方程 $2k^2+9k+11=0$ 无实根，$\therefore$ 无论 k 取什么实数，原多项式都不能分解成两个一次因式之积.

10. $a=-6$，$b=1$.

11. $A=4$，$B=0$ 或 $A=-4$，$B=8$.

12. $A=3$，$B=2$，$C=-5$ 或 $A=-3$，$B=-2$，$C=5$.

13. $\Delta=(c-a)^2-4(b-c)[-(c-b)]=0$，即

$$[(c-a)+2(b-c)][(c-a)-2(b-c)]=0.$$

$\therefore 2b-a-c=0$ 或 $3c-a-2b=0$.

14. 要使方程的二根为有理数，必须满足 $a\neq-1$，$\Delta=m^2$，即 $\Delta=[-(2-3a)]^2-4(1+a)(1+5a)=a(-11a-36)=m^2$，$a\neq-1$. (i) 当 $m=0$ 时，$a(-11a-36)=0$，解得 $a=0$ 或 $a=-\dfrac{36}{11}$；(ii) 当 $m\neq0$ 时，$\Delta=a(-11a-36)=m^2$ 为完全平方数，令 $-11a-36=p^2a$（p 为非零有理数），$\therefore a=-\dfrac{36}{p^2+11}$. 由于 $p=\pm5$ 时，$a=-1$，$\therefore a=-\dfrac{36}{p^2+11}$（$p$ 为非零有理数，且 $p\neq\pm5$）时，方程有两个不相等的有理根.

15. $\Delta=k^2-4(k+8)=(k+4)(k-8)$，令 $\Delta=m^2$（m 为有理数）. (i) 当 $m=0$ 时，$k=-4$ 或 $k=8$. (ii) 当 $m\neq0$ 时，令 $k-8=p^2(k+4)$（显然 $p\neq\pm1$），解得 $k=$

$\frac{4p^2+8}{1-p^2}$. ∴当 $k=-4$ 或 $k=8$ 或 $k=\frac{4p^2+8}{1-p^2}$（p 为不等于 ±1 的有理数）时方程二根为有理数.

方程 $x^2-kx+(k+8)=0$ 的一根大于 2，一根小于 2 的充要条件为 $f(2)<0$，即 $4-2k+k+8<0$，解得 $k>12$. ∴$k=-4$ 或 $k=8$（不合，舍去）. 令 $\frac{4p^2+8}{1-p^2}>12$，解得 $-1<p<-\frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{2}<p<1$. ∴ 当 $k=\frac{4p^2+8}{1-p^2}$ $\left(p\text{ 为有理数，且 }-1<p<-\frac{1}{2}\text{ 或 }\frac{1}{2}<p<1\right)$ 时，方程的二根为有理数，且一根大于 2，一根小于 2.

16. 令 $\Delta_1=(a+1)^2+4\times2(3a^2-4a+m)=25a^2-30a+8m+1=p^2$（$p$ 为有理数），则 $m=\frac{1}{8}(p^2-25a^2+30a-1)$（$p$ 为有理数），这时方程的根 $x=\frac{-(a+1)\pm p}{4}$ 为有理数.

17. $\Delta=(k+1)^2+4k=k^2+6k+1$. ∵$k$ 为整数，∴k^2+6k+1 为整数，设 $k^2+6k+1=n^2$（n 为整数），即有 $(k+3)^2-n^2=8$，$(k+3-n)(k+3+n)=8$，由此解得 $k=0$ 或 $k=-6$.

18. 由题设有 $\sqrt{12-a}+\sqrt{12+b}=7$，$\sqrt{13+a}+\sqrt{13+d}=7$，即

$$\sqrt{12-a}=7-\sqrt{12+b}, \qquad ①$$

$$\sqrt{13+a}=7-\sqrt{13+d}. \qquad ②$$

注意到 a,b 为整数，易知 $\sqrt{12+b}$，$\sqrt{13+d}$ 均为整数，由①可得 $a+b+7=14\sqrt{a+b}$，左边为整数，因而右边也为整数，∴ $\sqrt{12+b}$ 为有理数. ∵b 为整数，∴$12+b$ 为完全平方数，即 $\sqrt{12+b}$ 为整数. 同理可证 $\sqrt{13+d}$ 也为整数. 设 $p=7-\sqrt{12+b}$，$q=7-\sqrt{13+d}$，由①，②消去 a 得 $p^2+q^2=25$. 从而 (a,b) 的值有如下四组：$(12,37)$；$(3,4)$；$(-4,-3)$；$(-13,-8)$.

19. $\Delta=8a+1$ 是完全平方数，可设 $8a+1=(2t+1)^2$（t 为正整数），则 $a=\frac{1}{2}t(t+1)$，∴$x_{1,2}=-2+\frac{4}{t}$ 或 $-2-\frac{4}{t+1}$，从而可求得 $a=1,3,6,10$.

20. 分 $a=-1$ 与 $a\neq-1$ 讨论，得 $a=-1,0,1$.

习题五解答

1. (1) B. (2) D. (3) B. (4) A. (5) E. (6) A. (7) C. (8) A. (9) D. (10) D. (11) C.

2. (1) $(ac\pm bd)^2+(ad\mp bc)^2$. (2) $a=2\times3^3\times7^2=2646$. (3) 6 或 2. (4) ④. (5) 84. (6) 2. (7) 1988. (8) $m+2\sqrt{m}+1$. (9) 不是. (10) 13. (11) 22,78. (12) 29. (13) 17. (14) $\frac{1}{8}$. (15) 28 个. (16) 5 个.

3. 设两个正整数为 x 及 y,由此 $x+y+1000=xy$, $xy-x-y+1=1001$, $(x-1)(y-1)=7\cdot11\cdot13$. 设 x 是完全平方数,由于 $x-1$ 只能取 7,11,13,77,91,143, $\therefore x$ 只能取 8,12,14,78,92,144. 经验证 $x=144$,从而 $y=8$, $\therefore \frac{x}{y}=18$.

4. $\because l^2+m^2=n^2$, $\therefore l^2=n^2-m^2=(n+m)(n-m)$. $\because l$ 为质数且 $n+m>n-m>0$, $\therefore n+m=l^2$, $n-m=1$, $\therefore l^2=n+m=2m+1$, $2m=l^2-1$. $\therefore 2(l+m+1)=2l+2m+2=(l+1)^2$.

5. 原数$=\underbrace{11\cdots1}_{17个}+\underbrace{11\cdots1}_{15个}\times10+\underbrace{11\cdots1}_{13个}\times10^2+\cdots+111\times10^7+1\times10^8=(10^{16}+10^{15}+\cdots+10+1)+(10^{14}+10^{13}+\cdots+10+1)+\cdots(10^2+10+1)\times10^7+10^8=\frac{10^{17}-1}{10-1}+\frac{10^{15}-1}{10-1}\times10+\frac{10^{13}-1}{10-1}\times10^2+\cdots+\frac{10^3-1}{10-1}\times10^7+\frac{10-1}{10-1}\times10^8=\frac{1}{9}[10^9(1+10+\cdots+10^8)-(1+10+\cdots+10^8)]=\frac{1}{9}(10^9-1)(1+10+\cdots+10^8)=\left(\frac{10^9-1}{9}\right)^2=111111111^2$.

6. 当 $n=4m$ 或 $4m+1$ 时, $3^n+2\times17^n$ 的个位数字是 7;当 $n=4m+2$ 或 $4m+3$ 时, $3^n+2\times17^n$ 的个位数字为 3,所以 $3^n+2\times17^n$ 不是完全平方数.

7. 数 $1976^{15}+2$ 是偶数,但它不能被 4 整除.

8. 令 N 表示所得的数,求 N 除以 9 的余数. 这个余数与 N 的各位数字之和除以 9 的余数是相同的,而后者与和 $L=1+2+\cdots+1976$ 除以 9 的余数是相同的(因为这和式中每一项$\overline{abcd}$与和 $a+b+c+d$ 相差一个 9 的倍数). 由于

$$\begin{aligned}L&=\frac{1996\cdot1997}{2}=988\cdot1977\\&=(9\cdot107+7)(9\cdot219+6)=9a+42\\&=9b+6,\end{aligned}$$

其中 a,b 是整数,故 L 除以 9 的余数为 6. 设 $N=9C+6$,其中 C 是整数. 故 $N=3\cdot(3C+2)$能被 3 整除. 若 N 是完全平方数 $N=n^2$,则 n 也能整除 3,从而 N 能整除 9. 这是不可能的,因为 $N=9C+6$. 由此可见,N 不是一个完全平方数.

9. $\underbrace{11\cdots1}_{m个}\times\underbrace{10\cdots05}_{m+1个}+1=\frac{1}{9}(10^m-1)(10^m+5)+1=\frac{1}{9}(10^m+2)^2=\left(\frac{10^m+2}{3}\right)^2$.

易知 $3|(10^m+2)$, $\therefore$所给和数是平方数.

10. $n^2=(2k)^2=(k^2+1)-(k^2-1)^2$；$n^2=(2k+1)^2=(2k^2+2k+1)^2-(2k^2+2k)^2$.

11. $a^2<a(a+1)+1<(a+1)^2$.

12. $(2m+1)^2+(2n+1)^2=2(2m^2+2m+2n^2+2n+1)$是 2 的倍数，但不是 4 的倍数.

13. 由$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$得 $a+b=\frac{ab}{c}$，∵a,b 为整数，∴$a+b$ 为整数，∴$\frac{ab}{c}$也为整数. 令 $c=qr$(q,r 是整数)，应有 $q|a,r|b$，即 $mq=a,pr=b$，于是 $a+b=\frac{ab}{c}=\frac{mq\cdot pr}{qr}=pm$. 又∵$a,b,c$ 的最大公约数为 1，m 与 r 互质，p 与 q 互质，由于 $a+b=pm$，即 $mq+pr=pm$，知 $m|p,p|m$，∴$m=p$，∴$a+b=mq+pr=p(q+r)=p^2$. 同理可得 $a-c=pq-qr=q(p-r)=q^2$，$b-c=pr-qr=r(p-q)=r^2$.

14. 设$\overline{ab}$为所求的两位数，则$\overline{ab}+\overline{ba}=11(a+b)$. ∵$\overline{ab}+\overline{ba}$是完全平方数，11 为质数，∴$a+b=11\cdot k^2(k\in N)$. 注意到 $1\leqslant a+b\leqslant 18$，知 $k=1,a+b=11$. 由此求得适合条件的八个两位数：29，38，47，56，65，74，83，92.

15. 设 $n=10x+y$，其中 x 和 y 是整数，$0\leqslant y\leqslant 9$，则 $n^2=100x^2+20xy+y^2=20z+y^2$. 因此，$n^2$ 的十位数字是奇数，必须而且只须 y^2 的十位数字是奇数，所以 $y^2=16$ 或 36，而 n^2 的个位数字必须是 6.

16. 设原有战士 $8x$ 人，由已知 $8x+120$ 与 $8x-120$ 均为完全平方数，则有

$$8x+120=m^2, \quad ①$$

$$8x-120=n^2, \quad ②$$

其中 m,n 为正整数. 由①－②得 $m^2-n^2=240$，即$(m+n)(m-n)=240$. 由①，②知 m,n 能被 4 整除，∴$m+n$ 与 $m-n$ 能被 4 整除. 令

$$(\text{I})\begin{cases}m+n=60,\\ m-n=4,\end{cases} \quad 或 \quad (\text{II})\begin{cases}m+n=20,\\ m-n=12.\end{cases}$$

由(I)得 $m=32,n=18$，则 $8x=32^2-120=904$；

由(II)得 $m=16,n=4$，则 $8x=16^2-120=136$.

17. 若 $ab=0$，结论成立；若 $a\neq 0$，设 $b=ka$，则 $a=\frac{2k^2}{1+k^5}$，$1-ab=1-\frac{4k^5}{(1+k^5)^2}=\left(\frac{1-k^5}{1+k^5}\right)^2$，命题成立.

18.
$$(\underbrace{33\cdots3}_{n个}5)^2=\left(3\times\frac{10^n-1}{9}\times 10+5\right)^2$$
$$=\frac{10^{2n+2}-2\times 10^{n+2}+10^n}{9}+\frac{3\times(10^{n+2}-10^2)}{9}+25$$
$$=\frac{1}{9}(10^{2n+2}+10^{n+2}-2\times 10^2)+25$$

$$=\frac{1}{9}(10^{2n+2}+10^{n+2}-20)+5.$$

19. $\because 8\underbrace{99\cdots9}_{n-1}4\underbrace{00\cdots0}_{n-1}1=8\underbrace{99\cdots9}_{n-1}4\underbrace{00\cdots00}_{n}+1$

$$=9\underbrace{00\cdots0}_{n个}\underbrace{00\cdots0}_{n个}-6\underbrace{00\cdots0}_{n个}+1$$

$$=9\times10^{2n}-6\times10^{n}+1$$

$$=(3\times10^{n}-1)^2,$$

$\therefore$原数$=3\times10^n$. 故只有质因数 2,3,5.

20. (1) 原数$=224\underbrace{99\cdots9}_{(k-2)个}1\underbrace{00\cdots0}_{(k+1)个}+9$

$$=225\underbrace{00\cdots0}_{(k-2)个}\underbrace{00\cdots0}_{(k+2)个}-9\underbrace{00\cdots0}_{(k+1)个}+9$$

$$=(15\times10^k-3)^2;$$

(2) $\underbrace{33\cdots3}_{n+1个}{}^2$; (3) $\underbrace{66\cdots6}_{n个}5^2$; (4) $1\underbrace{99\cdots9}_{n个}{}^2$;

(5) $1\underbrace{33\cdots3}_{n个}4^2$; (6) $2\underbrace{66\cdots6}_{n个}8^2$; (7) $\left(\dfrac{8\times10^n+1}{3}\right)^2$.

21. 若 n^2 的各位数字之和为 1983，由于 1983 能被 3 整除，故 n^2 也能被 3 整除，从而 n 也应该被 3 整除，$\therefore n^2$ 能被 9 整除. 但 1983 不能被 9 整除，故各位数字之和为 1983 的完全平方数是不存在的.

各位数字之和为 1984 的完全平方数是存在的，令 $n=\underbrace{99\cdots9}_{219个}7$. $\because n=1\underbrace{00\cdots0}_{220个}-3$，$\therefore n^2=1\underbrace{00\cdots0}_{440个}-2\times3\times1\underbrace{0\cdots0}_{220个}+3^2=\underbrace{99\cdots9}_{219个}4\underbrace{0\cdots0}_{219个}9$，$\therefore n^2$ 的各位数字之和为 $219\times9+4+9=1984$.

22. $\because (10a+b)^2=10n+b^2$，而 $b^2=0,1,4,5,6,9$，故 $10n+2,10n+3,10n+7,10n+8$ 形式的数不是完全平方数.

23. 设四位数 n 加 400 后为完全平方数 k^2. $\because 1000\leqslant n<10000$，$\therefore 1400\leqslant n+400<10400$，即 $1400\leqslant k^2<10400$，$\because \sqrt{1400}\approx37.42$，$\sqrt{10400}\approx101.98$，$\therefore 38\leqslant k\leqslant101$. 于是符合条件的数的个数为 $101-38+1=64$ 个.

24. 当 $a\geqslant b>0$ 时，由 $a^2<a^2+2b\leqslant a^2+2a<(a+1)^2$ 知，a^2+2b 不可能是完全平方数；同理，当 $b\geqslant a>0$ 时，b^2+2a 也不可能是完全平方数.

25. 在 b 进制中，$1111=b^4+b^3+b^2+b+1$，而

$$\left(b^2+\frac{b}{2}\right)^2<b^4+b^3+b^2+b+1<\left(b^2+\frac{b}{2}+1\right)^2.$$

若上式中 $b^4+b^3+b^2+b+1$ 是一个完全平方数，则

$$\left(b^2+\frac{b+1}{2}\right)^2=b^4+b^3+b^2+b+1,$$

即 b 应满足 $b^2-2b-3=0$，$\therefore b=3$，或 $b=-1$（不合）. 当 $b=3$ 时，$1111=(102)^2$.

26. 由假设 $N^2=\overline{abcd}=\overline{(c+8)bc(b+4)}=\overline{cbcb}+8004=\overline{cb}\times 101+7979+25=(\overline{cb}+79)\times 101+25$，即 $(\overline{cb}+79)\times 101=(N-5)(N+5)$. 由于 101 是素数，$\therefore N-5=101$ 或 $N+5=101$，解得 $N=106,96$，代入验证知 106^2 不是四位数，$\therefore N=96$ 时，$N^2=9216$.

27. 设原数为 $\overline{ab}=10a+b$，则 $(10a+b)-(10b+a)=9(a-b)$ 是一个平方数，$\therefore a-b=0,1,4,9$. 当 $a=b$ 时，有 11，22，…，99 等 9 个；当 $a-b=1$ 时，有 10，21，…，98 等 9 个；$a-b=4$ 时，有 40，51，…，95 等 6 个；$a-b=9$ 时，仅有 90 一个. 共有 25 个.

28. 设相继三个数为 $n-1,n,n+1$，若有 $(n+1)^3=n^3+(n-1)^3$，即 $2=n^2(n-6)$，则 $n>6$. 但此时右边 $n^2(n-6)>3672$，即 $n^2(n-6)\neq 2$，矛盾.

29. 设 x 为所求二位数，则 $100(x+1)+x=N^2$，$100(x-1)+x=N^2$，故 $101x=(N-10)(N+10)$，$101(x-1)=(N-1)(N+1)$，$\therefore N=91$，$x=81$ 或 $N=100$，$x=100$（舍去）. $\therefore 81$ 即为所求.

30. 1681.

31. 假设 n^2+n+2 能被 15 整除，于是 $n^2+n+2=15k$，$n^2+n+2-15k=0$，$n=\dfrac{-1\pm\sqrt{60k-7}}{2}$. 由于 $60k-7$ 的个位数是 3，所以 $60k-7$ 不是完全平方数，从而 $\sqrt{60k-7}$ 不是有理数，$\therefore n$ 不可能是自然数. 于是 n^2+n+2 不能被 15 整除.

32. 先证 x,y 中至少有一个是偶数. 假设 x 和 y 都是奇数，则 x^2+y^2 都是 $4k+1$ 型的数，从而 x^2+y^2 是 $4k+2$ 型的数. 由 $x^2+y^2=z^2$ 知 z^2 是 $4k+2$ 型的数，但平方数不可能为 $4k+2$ 型，所以 x 和 y 不可能都是奇数，即至少有一个是偶数. 再证 x,y 至少有一个是 3 的倍数. 设 x,y 都不是 3 的倍数，则 x^2,y^2 都是 $3k+1$ 型的数，从而 x^2+y^2 是 $3k+2$ 型的数，而 z^2 不可能为 $3k+2$ 型的数，$\therefore x$ 和 y 不可能都不是 3 的倍数，即至少有一个是 3 的倍数，由于 2 与 3 互质，$\therefore xy$ 能被 $2\times 3=6$ 整除.

33. 由于 $x^2=3y^2+3\times 665+2$，而 $3k+2$ 型的数不是平方数，所以 $x^2-3y^2=1997$ 没有整数解.

34. $m=993$，$n=994$.

35. 没有.

36. $m=496$，$n=498$；$m=64$，$n=78$.

37. 当 a 是偶数或奇数时，分别讨论.

38. 设四个连续的自然数为 $n,n+1,n+2,n+3$，则 $n(n+1)(n+2)(n+3)=(n^2+3n)(n^2+3n+2)=(n^2+3n)^2+2(n^2+3n)=(n^2+3n+1)^2-1$，$\therefore (n^2+3n)^2<n(n+1)(n+2)(n+3)<(n^2+3n+1)^2$，即 $n(n+1)(n+2)(n+3)$ 不是完

全平方数.

39. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_5,b$ 都是奇数，那么关系式 $a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2=b^2$ 的左边被 8 除时，余数等于 $1+1+1+1+1=5$，右边被 8 除时，余数为 1. 矛盾.

40. 任何整数被 8 除的余数只能是 $0,\pm1,\pm2,\pm3,\pm4$，平方后余数只能是 $0,1,4$. 形如 $8k,8k+1,8k+4$ 的任二数相加之后不可能是 $8c+6$ 的形式.

41. 若 N 为平方数，设 $N=k^2$(k 为整数)，则因 N 的数码之和 210 是 3 的倍数，故 $3|N$，即 $3|k^2$. 但 3 是质数，故 $3|k$，从而 $9|N$. 但 9 不能整除 210，矛盾.

42. (1) $a_{991}=2\times991-1=1981$；(2)由性质 2，$19\times10^4+a_{990}=191979$ 不是完全平方数. 同样

$$\underbrace{1919\cdots19}_{2m\text{位}}\times10^4+a_{990}=1919\cdots19,$$

其个位数是奇数，而十位数为 1 不是偶数，所以它也不是完全平方数. 故这个数列中的数都不是完全平方数.

43. 由 $0<x\leqslant9,0\leqslant z\leqslant9,x+z=10t$，知 $t=1,x+z=10$. $\because y=x-z=(x+z)-2z=10-2z\geqslant0,\therefore z\leqslant5$. 又 $\because x=10-z\leqslant9,\therefore z\geqslant1$. 因有五种可能：$z=1,2,3,4,5$；$x=9,8,7,6,5$；$y=8,6,4,2,0$. 相应的五位数为：9811，8621，7431，6241，5051. 易知只有 $6241=79^2$ 适合条件.

44. 设 $\overline{cd}=x,\overline{abcd}=t^2$，则 $100(x+1)+x=t^2$，即 $101x=(t+10)(t-10)$. $\because 101$ 是质数，$\therefore t+10,t-10$ 中必有一个是 101 的倍数，$\therefore t+10$ 是 101 的倍数. 又 $t+10\leqslant109,\therefore t+10=101$，于是 $t+10=101,t=91$，所求四位数是 $91^2=8281$.

45. $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}(8i+1)=4n(n+1)+n=4n^2+5n$. 设 $4n^2+5n=m^2$，其中 $m\in N$，则 $n=\dfrac{-5+\sqrt{25+16m^2}}{8}$，所以，$25+16m^2=t$，其中 $t\equiv5(\mathrm{mod}8)$. 于是 $(t-4m)(t+4m)=25$. 因为 $t-4m<t+4m$，所以 $t-4m=1,t+4m=25,t=13,n=1$. $\therefore$ 当且仅当 $n=1$ 时，S_n 是完全平方数.

46. 把 $4a(a+1)=b(b+1)$ 看作关于 a 的二次方程 $4a^2+4a+(-b^2-b)=0$，那么 $a=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+b+b^2}}{2}$. $\because b^2<b^2+b+1<(b+1)^2,\therefore b^2+b+1$ 不是整数的平方，而 $\dfrac{-1\pm\sqrt{b^2+b+1}}{2}$ 不可能是整数.

47. 将此 n 个互不相等的正整数由小到大排列，记为 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$，并记

$$F=\left(\frac{1}{a_1}\right)^2+\left(\frac{1}{a_2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{a_n}\right)^2.$$

当 $a_1>1$ 时，

$$0<F=\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\cdots+\frac{1}{a_n^2}$$

$$\leqslant \frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^2}$$
$$<\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{n\times(n+1)}$$
$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=1-\frac{1}{n+1}<1,$$

$\therefore F$ 不是整数.

当 $a_1=1$ 时,仿此可得 $0<F-1=\frac{1}{a_2^2}+\frac{1}{a_3^2}+\cdots+\frac{1}{a_n^2}<1$,即 $1<F<2$, $\therefore F$ 也不是整数.

48. $\frac{a^4+b^4+(a+b)^4}{2}=\frac{a^4+b^4+(a^2+2ab+b^2)^2}{2}$

$=a^4+b^4+2a^2b^2+2a^3b+2ab^3+a^2b^2$

$=(a^2+b^2)^2+2ab(a^2+b^2)+ab=(a^2+b^2+ab)^2$.

49. 设 $S_1=a^2, S_2=b^2, a>b>0$,则 $(a+b)(a-b)=1989=3^2\times 3\times 17$, $\therefore a+b=m, a-b=n$,其中 $mn=1989$,且 $m>n$. 由此得 $a=\frac{m+n}{2}, b=\frac{m-n}{2}$. 令 $(m,n)=(1989,1),(663,3),(221,9),(153,13),(117,17),(51,39)$,得 $(a,b)=(995,994),(333,330),(115,106),(83,70),(67,50),(45,6)$.

50. 令 $3n+1=S^2(S\in N)$,且 $S\geqslant 4$. 易见 S 不是 3 的倍数,令 $S=3t\pm 1(t\in N)$,且 $t\geqslant 2$ 或 $t=1, S=3t+1$. 于是 $3n+1=(3t\pm 1)^2, n=\frac{(3t\pm 1)^2-1}{3}=3t^2\neq 2t$,故 $n+1=3t^2\pm 2t+1=t^2+t^2+(t\pm 1)^2$.

51. 令 $m=n-6(m\geqslant -5)$,那么 $n^3-18n^2+115n-391=(n-6)^3+7(n-6)-133=m^3+7m-133$,易得 $(m^3+7m-133)-(m+1)^3=-(3m^2-2m+134)<0$, $(m^3+7m-133)-(m-1)^3=3m^2+4m-132$. 由于当 $m\leqslant -8$ 或 $m\geqslant 7$ 时, $3m^2+6m-132>0$, $\therefore$ 此时只能有 $m^3+7m-133=m^3\Rightarrow m=19$. 当 $-5\leqslant m\leqslant 6$ 时,经验证 $m=5,6$ 时, $m^3+7m-133$ 是立方数. 因此原问题的解为 $n=11,12,25$.

52. 若 $2n+1$ 及 $3n+1$ 是完全平方数,因 $2\nmid 2n+1, 3\nmid 3n+1$,从而令 $2n+1=(2k+1)^2, 3n+1=(3t\pm 1)^2$, $\therefore n+1=k^2+(k+1)^2, n+1=(t\pm 1)^2+2t$. 反之,若 $n+1=k^2+(k+1)^2, n+1=(t\pm 1)^2+2t^2$,则 $2n+1=(2k+1)^2, 3n+1=(3t\pm 1)^2$.

53. 分两种情况讨论:(1)若 k 为偶数,记 $k=2m(m=2,3,\cdots)$. 若 $m=2$,则 $k=4$,这时 $\frac{1}{2}k(k-1)-1=5^1$;若 $m>2$,则由 $\frac{1}{2}(k-1)k-1=m(2m-1)-1=(2m+1)(m-1)=p^n$, $\therefore 2m+1=p^a, m-1=p^b\cdots$①. $a,b\in N, a>b, a+b=n$, $\therefore 2p^b+3=p^a\cdots$②. $\because m>2$, $\therefore$ 由①得 $p^b>1$,又由 $p^b|p^a$ 及②得 $p^b|3$, $\therefore p^b=$

$3, m=4, k=8, \frac{1}{2}(k-1)k-1=27=3^3$.

(2) 若 k 为奇数，$\frac{1}{2}(k-1)k-1=9=3^2$，$\therefore k=3,4,5$.

54. 设 $x=m+\alpha, \frac{1}{x}=n+\beta$（$m,n$ 为整数，$0\leqslant\alpha,\beta<1$），则 $\{x\}+\left\{\frac{1}{x}\right\}=\alpha+\beta=1$，故 $\frac{1}{x}+x=n+\beta+m+\alpha=m+n+1$ 为整数，于是可设 $x+\frac{1}{x}=k$（k 为整数），即 $x^2-kx+1=0$，解得 $x=\frac{1}{2}(k\pm\sqrt{k^2-4})$. 当 $|k|=2$，$|x|=1$，经验证，它不满足所设等式. 当 $|k|\geqslant3$ 时，$x=\frac{1}{2}(k\pm\sqrt{k^2-4})$ 是满足等式的全体实数. 因 k^2-4 不是完全平方数，故 x 是无理数，即满足题设等式的 x 都不是有理数.

55. 设两个自然数为 x_1,x_2，则 $x_1+x_2=2A, x_1x_2=G^2$，即 x_1,x_2 是方程 $x^2-2Ax+G^2=0$ 的两个根，$\therefore A\pm\sqrt{A^2-G^2}$ 应为自然数. 设 $A=10a+b$（$1\leqslant a,b\leqslant9$），则 $G=10b+a$. 但 $1\leqslant a-b\leqslant8$，故 $11\nmid a-b$，$\therefore 11\mid a+b$. 由 $a+b\leqslant9+8=17$，知 $a+b=11$，这就要求 $a-b$ 是完全平方数. 由 $a-b=(a+b)-2b=11-2b$ 知 $a-b$ 应为奇数的完全平方数，$\therefore a-b=1^2$，$\therefore a=6, b=5$. 两数为 98 与 32.

56. 当 $x\geqslant y$ 时，$x^2<x^2+y+1\leqslant x^2+x+1<x^2+2x+1=(x+1)^2$，$\therefore x^2+y+1$ 不是完全平方数；当 $x<y$ 时，$y^2<y^2+4x+3<y^2+4y+3<y^2+4y+4=(y+2)^2$，这时若 $y^2+4x+3\neq y^2+2y+1=(y+1)^2$，则 y^2+4y+3 不是完全平方数；若 $y^2+4x+3=y^2+2y+1$，即 $2y=4x+2, y=2x+1$ 时，y^2+4x+3 是完全平方数，这时看 x^2+y+3，$x^2<x^2+y+3=x^2+(2x+1)+3=x^2+2x+4<x^2+4x+4=(x+2)^2$.

57. 若对某个 n，$[S_n,S_{n-1})$ 中无完全平方数，则存在 $a\in Z, a\geqslant0$，使 $a^2<S_n<S_{n+1}\leqslant(a+1)^2$. 于是

$$k_{n+1}=S_{n+1}-S_n<(a+1)^2-a^2=2a+1.$$

$\because k_1<k_2<\cdots<k_n<k_{n+1}$ 是没有两个相邻的正整数，$\therefore k_n\leqslant k_{n+1}-2<2a-1$，$k_{n-1}\leqslant k_n-2<2a-3,\cdots$. $S_n=k_1+k_2+\cdots+k_n<(2a-1)+(2a-3)+\cdots+1=a^2$. 这与 $S_n>a^2$ 的假定矛盾. 故命题成立.

58. 对 $k=1,2,3$，取 $m=1+4l$（l 为正奇数），则 $m^2+7\equiv0\pmod{2^4}$. 对 $k\geqslant3$，设有正整数 m，满足 $m^2+7\equiv0\pmod{2^{k+1}}\cdots$①. 显然 m 为奇数. 对任意正整数 a，$(m+a\cdot2^k)^2+7\equiv m^2+7+2^{k+1}ma=2^{k+1}(b+ma)\pmod{2^{k+2}}$. 其中 $b=\frac{m^2+7}{2^{k+1}}$ 是整数. 取 a 与 b 的奇偶性相同，则 $(m+a\cdot2^k)^2+7\equiv0\pmod{2^{k+2}}$. 因此，对任意正整数 k，均有无穷多个 m 满足①，即有无穷多个正整数 n，使 $n\cdot2^k-7$ 为平方数 m^2.

59. 设 x_n 是第 n 步所写的数，那么 $x_1=1, x_{n+1}=n+x_1^2+\cdots+x_n^2$（$n\geqslant1$）. 由

此得 $x_2=2$，且当 $n\geqslant 2$ 时，$x_{n+1}=x_n^2+x_n+1$. 于是，在 $n\geqslant 1$ 时有不等式 $x_n^2<x_{n+1}<(x_n+1)^2$. 因此，当 $n\geqslant 1$ 时，x_{n+1}不是完全平方数.

60. 如果 A 是完全平方数，则数列最终为常数，因为它恒等于 A，显然，如果数列不包含任何的完全平方数，它将发散于无穷大. 又如果 a_n 不是完全平方数，而 $a_{n+1}=(r+1)^2$，若 $a_n\geqslant r^2$，则 $a_{n+1}=a_n+S(a_n)$，$(r+1)^2=a_n+(a_n-r^2)$，有 $r^3+(r+1)^2=2a_n$，矛盾. 因为左边为奇数而右边为偶数. 反之，若 $a_n<r^2$，则有 $(r+1)^2=a_n+S(a_n)<r^2+[r^2-1-(r-1)^2]=r^2+2r-2$，仍矛盾. 因此，如果 A 不是完全平方数，则任何 a_n 都不是完全平方数.

书名
版权
前言
目录
正文